CUADERNO DE ACTIVIDADES

Tomo 1

MATEMÁTICA 3°·4° medio

Daniela Gaete Pino
Gladys Osorio Railef
María Patricia Romante Flores
Patricia Ramírez Fuenzalida
Robbie Barrera Yánez
Patricio Norambuena Morales
Yasna Hurtado Lobos

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN

sm

TOMO 1

3° y 4° medio medio

MATEMÁTICA
CUADERNO DE ACTIVIDADES

Robbie Barrera Yáñez
Licenciado en Educación de Física y Matemática
Profesor de Estado en Física y Matemática

María Patricia Romante Flores
Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Gladys Osorio Railef
Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Patricio Norambuena Morales
Licenciado en Educación Matemática y Computación

Daniela Gaete Pino
Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Patricia Ramírez Fuenzalida
Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Yasna Hurtado Lobos
Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

En el desarrollo del Cuaderno de Actividades de Matemática 3° y 4° medio SM, participó el siguiente equipo:

Dirección editorial
Arlette Sandoval Espinoza

Coordinación área Matemática
Carla Frigerio Cortés

Edición
Gladys Osorio Railef
María Patricia Romante Flores
Patricio Norambuena Morales

Ayudante de edición
Lisset Donoso Vera

Autoría
Daniela Gaete Pino
Gladys Osorio Railef
María Patricia Romante Flores
Patricia Ramírez Fuenzalida
Robbie Barrera Yánez
Patricio Norambuena Morales
Yasna Hurtado Lobos

Consultoría
Johanna Camacho González

Corrección de estilo y prueba
Víctor Navas Flores

Desarrollo de solucionario
Andree Fouere Poblete
Esteban Fernández Ortega
Luz Fuentes Acevedo
Tomás Bralić Muñoz

Dirección de arte y diseño
Carmen Gloria Robles Sepúlveda

Coordinación de diseño
Gabriela de la Fuente Garfias

Iconografía
Vinka Guzmán Tacla

Diseño y diagramación
Mauricio Fresard Lemmermann
Williams Gálvez Baettig

Fotografías
Banco de imágenes SM
Istockphoto
Shutterstock
Wikimedia Commons

Jefatura de planificación
Andrea Carrasco Zavala

Gestión de derechos
María Loreto Ríos Melo

En este cuaderno se utilizan de manera inclusiva términos como “los niños”, “los padres”, “los hijos”, “los apoderados”, “profesores” y otros que refieren a hombres y mujeres.

De acuerdo con la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos de cada sexo que formen parte del conjunto. Este uso evita además la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

Este cuaderno corresponde al tercer y cuarto año de Educación Media y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 193/2019, del Ministerio de Educación de Chile.

© 2019 – SM S.A. – Coyancura 2283 piso 2 – Providencia

ISBN: 978-956-363-724-3 / Depósito legal: 309649

Se terminó de imprimir esta edición de 204.023 ejemplares en el mes de Enero del año 2020. Impreso por RR. Donnelley.

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del “Copyright”, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

En este cuaderno se utilizaron las siguientes familias tipográficas: Aspira nar y Unit Slab Pro.

ÍNDICE

Unidad 1 LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES DE INCERTEZA 4

Lección 1: Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos 4
- Medidas de dispersión 4
- Comparación de conjuntos de datos 6
- **Antes de continuar** 8

Lección 2: Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales 9
- Probabilidad condicionada 9
- Probabilidad total 11
- **Antes de continuar** 13

Unidad 2 MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA DESCRIBIR Y PREDECIR 14

Lección 3: Modelamiento de fenómenos con la función exponencial 14
- Función exponencial 14
- Crecimiento y decrecimiento exponencial 17
- **Antes de continuar** 19

Lección 4: Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica 20
- Función logarítmica 20
- Relación entre las funciones exponencial y logarítmica 23
- **Antes de continuar** 25

Unidad 3 RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA 26

Lección 5: Resolución de problemas con ángulos en la circunferencia 26
- Ángulos del centro e inscrito en una circunferencia 26
- Ángulos interiores y exteriores en la circunferencia 28
- **Antes de continuar** 30

Lección 6: Resolución de problemas con segmentos en la circunferencia 31
- Cuerdas en la circunferencia 31
- Secantes y tangentes en la circunferencia 33
- **Antes de continuar** 35

Unidad 4 UN ÚLTIMO PELDAÑO ALGEBRAICO: LOS NÚMEROS COMPLEJOS 36

Lección 7: El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$) 36
- Conjuntos de los números complejos 36
- Representación de números complejos 38
- Módulo y conjugado de un número complejo 40
- **Antes de continuar** 42

Lección 8: Resolución de problemas usando la operatoria de números complejos 43
- Adición y sustracción de números complejos 43
- Multiplicación de números complejos 45
- División de números complejos 47
- **Antes de continuar** 49

Solucionario 50

Rúbricas de actividades 60

Lección 1 Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos

Medidas de dispersión

1. Calcula el rango, la varianza y la desviación estándar de los siguientes conjuntos de datos:

a. 20, 5, 8, 20, 11

b. 6, 2, 13, 1, 12

2. David, el profesor de Historia, tiene la siguiente información respecto de las notas de su curso en una prueba.

Notas del Tercero A en una prueba de Historia	
Nota	Frecuencia
[1,0; 2,0[	4
[2,0; 3,0[	8
[3,0; 4,0[	9
[4,0; 5,0[	11
[5,0; 6,0[	7
[6,0; 7,0]	6

a. Calcula el promedio y la varianza de los datos.

Medicina

3. El análisis de la sangre de una persona durante 7 semanas arroja las siguientes cantidades de leucocitos, tambien llamados globulos blancos:

Semana 1 → 3500/mm^3

Semana 2 → 12 000/mm^3

Semana 3 → 4800/mm^3

Semana 4 → 4100/mm^3

Semana 5 → 3700/mm^3

Semana 6 → 6200/mm^3

Semana 7 → 3100/mm^3

a. Calcula el rango, la desviación media y la varianza.

b. Calcula la desviación estándar.

c. El médico que trata al paciente debe cambiar el tratamiento si el promedio de la cantidad de leucocitos es inferior a 4500/mm^3 y la desviación estándar es inferior a 2000 mm^3. ¿Qué decisión tomará el doctor?, ¿por qué?

Lección 1

Comparación de conjuntos de datos

1. En un colegio se aplica una prueba a tres terceros medios. En los 3 cursos hubo estudiantes con la nota máxima (7). Además, se obtuvieron los siguientes datos:

	$\bar{x}$	σ	$X_{mín}$	Med	Q_1	Q_3
3° A	5,4	1,6	3,5	5,8	4,5	6,0
3° B	5,5	1,9	2,0	5,9	4,8	6,3
3° C	5,6	2,0	1,8	5,9	5,0	6,0

Evalúa si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones.

a. _____ Un estudiante del 3° A que tiene un 6,5 pertenece al tercer cuartil.

b. _____ Las notas son menos dispersas en el 3° medio A que en los otros cursos.

c. _____ El mejor rendimiento lo tiene el 3° C, pues el promedio es 5,6.

d. _____ El curso con menor dispersión es el 3° A, pues la desviación estándar es 1,6.

e. _____ En los tres cursos, el 50 % de los estudiantes obtuvo nota superior a 5,5.

2. Según la situación anterior, ¿qué curso tiene mejor rendimiento? Justifica.

_____

_____

3. Paulina trabaja en una ferretería y ha recibido de una distribuidora dos tipos de muestas; una muestra de 9 clavos (medidos en pulgadas) y de otra, una de 9 varas de madera (medidas en metros).

Clavos	2,0	2,5	3,4	2,6	3,3	3,5	2,1	2,3	2,1

Varas	3,3	3,0	3,5	3,2	3,5	3,6	2,7	3,5	3,5

a. Calcula el coeficiente de variación para cada conjunto de datos. Utiliza una hoja de cálculo.

b. ¿Por cuál distribuidora optará Paulina? Justifica.

_____

_____

4. Dos candidatos, Elvira y Juan, han rendido 7 pruebas de selección para una empresa. Los puntajes que obtuvieron cada uno fueron los siguientes:

Elvira: 80, 40, 62, 72, 46, 80, 40

Juan: 57, 55, 54, 52, 62, 55, 59

Si el director de la empresa debe decidir por aquel que tuvo mejor rendimiento, ¿a quién contratará? Aplica los indicadores de dispersión que resulten más convenientes en este caso.

Actividad de aplicación Analizando el desempeño futbolístico

Objetivo: Utilizar medidas de dispersión de datos para establecer desempeños en los equipos de fútbol.

Planifiquemos y ejecutemos

Paso 1: Organícense en parejas y seleccionen un equipo de fútbol para comparar 2 jugadores del equipo.

Paso 2: Descarguen en su celular la aplicación gratuita "365 scores" para filtrar la información necesaria. Luego, tomen decisiones respecto de:

- ¿Qué equipo de fútbol analizaremos: equipo chileno o extranjero?
- ¿Qué tipo de jugador compararemos: delanteros, centrocampistas, defensas?
- ¿Qué compararemos: cantidad de goles, pases efectivos, faltas leves y/o graves?
- ¿Qué medidas de tendencia central, dispersión y posición utilizarán?

Presentemos

Paso 3: Expongan sus resultados a su curso. Pueden utilizar redes sociales, correo electrónico, un video u otro medio para retroalimentar su trabajo. Luego, respondan:

a. ¿Por qué eligieron ese equipo y esos jugadores?

_____

b. ¿Por qué utilizaron ese parámetro de comparación?

_____

c. Si fueras DT del equipo de fútbol analizado, ¿a cuál de los 2 jugadores pondrías de titular en el próximo partido? Argumenta.

_____

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. La siguiente tabla muestra el tiempo que se demora un estudiante en resolver distintos ensayos PSU de 40 preguntas.

Corrección de formularios en un mes	
Tiempo (minutos)	Frecuencia
[40, 45[	7
[45, 50[	10
[50, 55[	13
[55, 60[	18
[60, 65[	0
[65, 70]	21

a. ¿Cuál es el tiempo promedio que se demora el estudiante en resolver los ensayos?

b. Calcula la varianza y la desviación estándar.

c. Si el promedio de los tiempos es superior a 55 minutos y la desviación estándar es superior a 45 minutos, el estudiante deberá realizar cambios en la forma de estudio. ¿Deberá realizar cambios para optimizar sus tiempos de estudio? Fundamenta.

2. A continuación, se presentan las notas que obtuvieron dos cursos en una prueba de Matemática. Dichas notas son determinantes para elegir al curso con mejor rendimiento para representar al colegio en las próximas olimpiadas matemáticas.

3° medio A

3,2 – 4,5 – 6,3 – 7,0 – 3,5 – 6,4
6,8 – 5,1 – 4,4 – 3,9 – 4,0 – 5,2
5,8 – 7,0 – 6,1 – 6,6 – 4,3 – 5,9

3° medio B

6,0 – 6,5 – 6,7 – 7,0 – 4,3 – 3,9
5,4 – 5,6 – 6,8 – 6,6 – 6,2 – 5,5
3,2 – 4,5 – 3,5 – 5,2 – 4,9 – 5,2

El profesor de la asignatura escogió al 3° A para representar al colegio en las próximas olimpiadas.

a. Aplica las medidas de dispersión que consideres convenientes para comparar el rendimiento en la prueba de ambos cursos. Utiliza una hoja de cálculo para realizar los cálculos.

b. ¿Fue correcta la decisión del profesor? Argumenta tu respuesta.

Probabilidad condicionada

1. En una sala de clases hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son hombres. Además, 6 mujeres y 5 hombres tienen ojos de color café y el resto tiene ojos negros. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga ojos de color café si es hombre? Representa la situación usando un diagrama de árbol de probabilidades.

2. Al control de equipajes de una aduana llega un grupo de italianos, de los cuales 8 llevan consigo accesorios metálicos no permitidos. Si se eligen dos personas al azar para pasar por la puerta detectora de metales, ¿cuál es la probabilidad de que ambos tengan metales no permitidos?

3. La siguiente tabla muestra las opciones de viaje por género en un concurso que sorteará un viaje a Buenos Aires, Lima o Rapanui.

	Opciones de viaje		
Género	Buenos Aires	Lima	Rapanui
Hombre	70	112	86
Mujer	60	128	94

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea mujer y vaya a Lima?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador vaya a Rapanui?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea mujer dado que irá a Buenos Aires?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador vaya a Rapanui si es hombre?

4. Leonor estudia para su examen de Inglés y Jacinta para su examen de Ciencias Naturales. Ambos exámenes consisten en contestar dos temas extraídos al azar. Para aprobar la asignatura, hay que contestar bien los dos temas.

¿Quién tiene mayor probabilidad de aprobar su asignatura?

Probabilidad total

1. ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?

Obtener 5 al sumar el resultado del lanzamiento de dos dados de 6 caras.

Obtener dos espadas al extraer sin reposición dos cartas de una baraja española.

Obtener dos sellos al lanzar dos monedas.

2. En un centro de enseñanza, el 55 % de los estudiantes matriculados son mujeres. Se sabe que el 65 % de las mujeres no han estado enfermas durante el año y que el 25 % de los hombres tampoco.

Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad que haya estado enfermo durante el año? Resuelve usando un diagrama de árbol.

3. En una oficina se compran tres tipos de ventiladores: de pedestal, USB y de cielo. El 60 % de los ventiladores son USB, el 30 % de pedestal y el resto de cielo. Se sabe que los porcentajes de falla son los siguientes: USB, 15 %, de cielo 7 %, de pedestal, 3 %. Si se elige al azar un ventilador, ¿cuál es la probabilidad de que falle? Representa la situación utilizando un diagrama de árbol.

Deporte

4. Analiza la siguiente situación. Luego, resuelve.

a. Dibuja un diagrama de árbol con todos los posibles resultados.

b. Calcula la probabilidad de que Carlos gane el partido si la probabilidad de que Luis gane un set es de 0,4.

5. De un estuche que contiene 5 lápices azules y 6 negros, se sacan dos de ellos sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Evalúa si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

a. _____ Si A y B son sucesos y $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, entonces $P(A/B) = \frac{1}{2}$.

_____

b. _____ Si se escoge al azar un número entre 30 y 50 inclusive, la probabilidad de que sea impar dado que es mayor que 40 es $\frac{5}{21}$.

_____

c. _____ Siempre se cumple que $P(A/B)$ es equivalente a $P(B/A)$, con A y B sucesos.

_____

d. _____ Si A y B son sucesos, para calcular $P(A/B)$ solo se necesita conocer $P(A)$ y $P(B)$.

_____

2. La siguiente tabla de contingencia muestra el número de personas que padecen o no bronquitis, según sean o no fumadores:

	Fumadores	No fumadores
Con bronquitis	120	15
Sanos	42	65

Si se elige una persona al azar, responde:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que padezca bronquitis?, ¿y cuál es la probabilidad de que esté sana?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana dado que es fumador?, ¿cuál es la probabilidad que esté enferma dado que es fumador?

c. ¿Cuál es la probabilidad de estar sano dado que no es fumador?, ¿cuál es la probabilidad que esté sana dado que no es fumador?

Lección 3 Modelamiento de fenómenos con la función exponencial

Función exponencial

1. Identifica las funciones que son exponenciales. Para ello, escribe Sí o No según corresponda.

a. ☐ $f(x) = 4x$

b. ☐ $g(x) = 6^{-x}$

c. ☐ $h(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{x}$

d. ☐ $i(x) = x^{-5}$

e. ☐ $j(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{2}$

f. ☐ $k(x) = 3^{2-x}$

2. Verifica si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

a. _____ Una función exponencial con base mayor que cero y menor que uno es siempre una función decreciente.

_____

b. _____ Una función exponencial con base fraccionaria siempre es una función decreciente.

_____

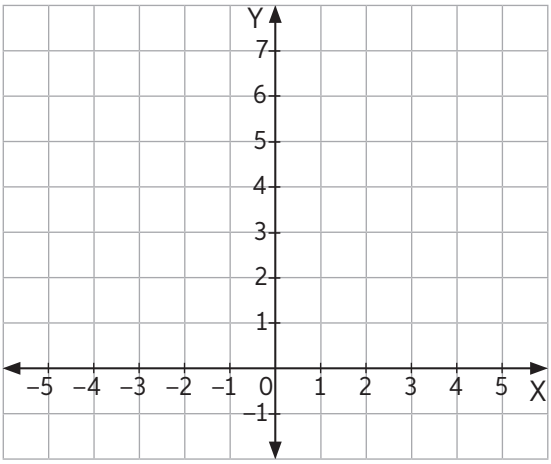
c. _____ La gráfica de la función $h(x) = a^x$ con $a > 1$, se traslada 5 unidades horizontalmente hacia los positivos si se grafica h(x – 5).

_____

3. Representa cada función en el plano cartesiano. Luego, indica si es una función creciente o decreciente.

a. $f(x) = 4^x$

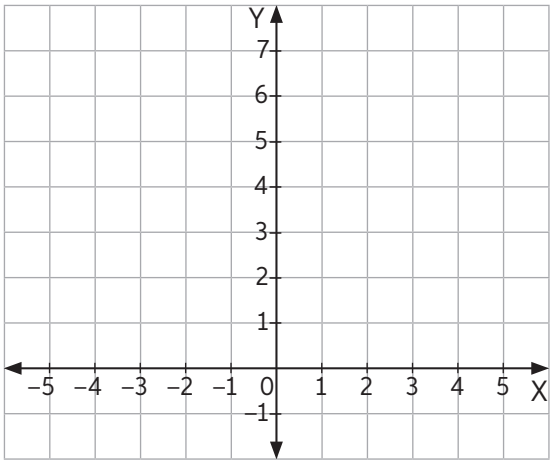
x	–3	–2	–1	0	0,5	1	1,6
$f(x)$							



Función: _____

b. $g(x) = e^{-x}$

x	–3	–2	–1	0	0,5	1	1,6
$g(x)$							



Función: _____

4. Completa cada casilla con la función correspondiente a su gráfica.

a. _____ $= 2^x + 3$

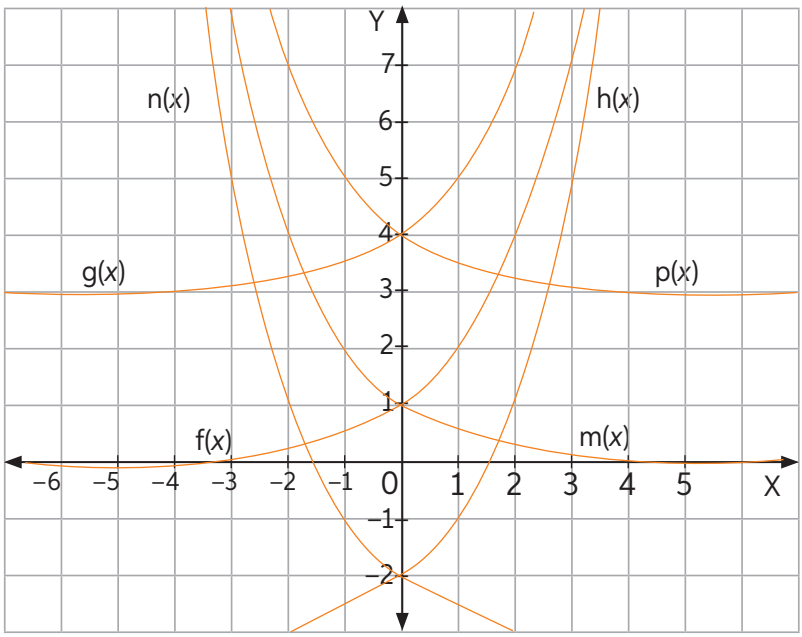
b. _____ $= 2^{-x}$

c. _____ $= 2^{-x} + 3$

d. _____ $= 2^{-x} - 3$

e. _____ $= 2^x - 3$

f. _____ $= 2^x$



5. Sin graficar, determina el dominio, recorrido y las intersecciones con los ejes de las gráficas correspondientes a las siguientes funciones exponenciales.

a. $f(x) = 2^x - 1$

b. $h(x) = 1 - 3^x$

c. $h(x) = 5^x - 2$

6. El área cubierta por un nenúfar en un lago se duplica cada día, creciendo gradualmente durante todo el día. Si al momento de empezar un estudio el nenúfar abarca una extensión de 1,2 m^2, ¿qué área ocupará dentro de 8 días?

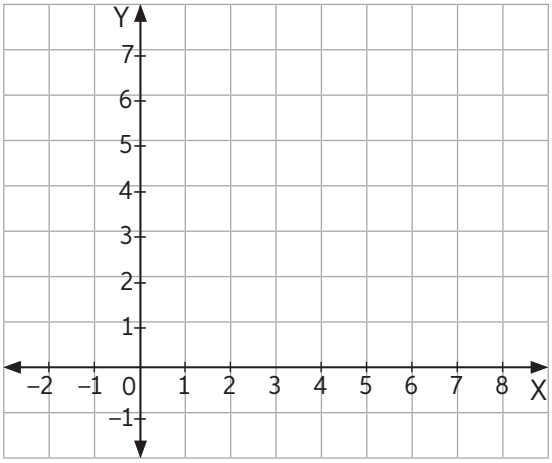
a. Completa la tabla.

Tiempo (días)	1	2	3	4	5	6	7	8
Área (m^2)	1,2							

Los **nenúfares** son plantas acuáticas con flores que crecen en lagos, lagunas, charcas o pantanos y que están usualmente enraizadas en el fondo.

b. ¿Qué función relaciona ambas variables? Llámala $A(t)$.

c. Representa la función en el plano cartesiano.



d. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función?

7. Se sabe que la concentración de anestesia en la sangre humana disminuye exponencialmente según la función $f(x) = k \cdot 0{,}95^x$, donde k es la cantidad inicial de anestesia en miligramos y x el tiempo en minutos desde su administración. ¿Cuántos miligramos de anestesia quedan en la sangre del paciente después de hora y media?

Se administraron 60 mg de anestesia a este paciente.

Crecimiento y decrecimiento exponencial

1. Lee la siguiente información. Luego, realiza lo pedido.

En Chile, a partir del 2016 se estableció la Ley Emilia, la que considera que un un conductor que tiene más de 0,8 gramos de alcohol por litro de sangre, se encuentra en estado de ebriedad.

Se estima que el riesgo que tiene una persona de sufrir un accidente cuando conduce un vehículo bajo los efectos del alcohol está dado por la expresión:

$$R(x) = 6 \cdot e^{kx},$$

donde $R(x)$ es el riesgo expresado como probabilidad, x es la concentración de alcohol en la sangre y k una constante.

a. Calcula el valor de la constante k sabiendo que una concentración de 0,04 g/L de alcohol en la sangre ($x = 0{,}04$) corresponde a un riesgo del 10 % ($R = 10$).

b. Una persona que, de acuerdo con la ley chilena, conduce en estado de ebriedad (0,8 g/L de alcohol en la sangre), ¿qué riesgo tiene de sufrir un accidente?

c. Investiga sobre la concentración de alcohol en la sangre para lo cual un conductor se encuentra bajo la influencia del alcohol. ¿Qué riesgo tiene de sufrir un accidente?

Sitio web recomendado:
www.conaset.cl

d. Si una persona presenta el doble de concentración de alcohol que otra, ¿cuánto mayor es su riesgo de accidente?

2. Observa las funciones $p(x)$ que representan el precio del celular transcurridos x años desde la compra.

Celular A
Precio inicial
$580 000
$p(x) = p_0 \cdot (0{,}9)^x$

Celular B
Precio inicial
$390 000
$p(x) = p_0 \cdot (0{,}75)^x$

a. Escribe el porcentaje de aumento o disminución anual del precio de cada celular.

_____

b. Estima el tiempo que debe transcurrir para que el precio de cada celular sea la mitad del inicial.

Actividad de aplicación Método del carbono 14 (C14)

¿Qué haremos? Investigar acerca del método de datación del carbono 14 para estimar la edad de los fósiles y otras materias orgánicas.

Planifiquemos

Paso 1: En parejas, investiguen sobre la datación del carbono 14 considerando las siguientes interrogantes:

- ¿Qué es la vida media de una sustancia radiactiva?
- ¿Cuál es la vida media aproximada del C14?, ¿qué significa esto?
- ¿El modelo de carbono 14 ees una función exponencial crecimiente o decreciente?, ¿por qué?

Ejecutemos

Paso 2: Completen la siguiente tabla con la información encontrada.

Vida media	Tiempo (años)	Fracción de cantidad de C14 que queda en el ser vivo o materia orgánica
0	0	Cantidad inicial de C14
1		Queda
2		Queda
3		Queda

Concluyamos

Paso 3: Escriban las conclusiones del trabajo realizado. Luego, compartan y comparen sus resultados con otras parejas.

_____

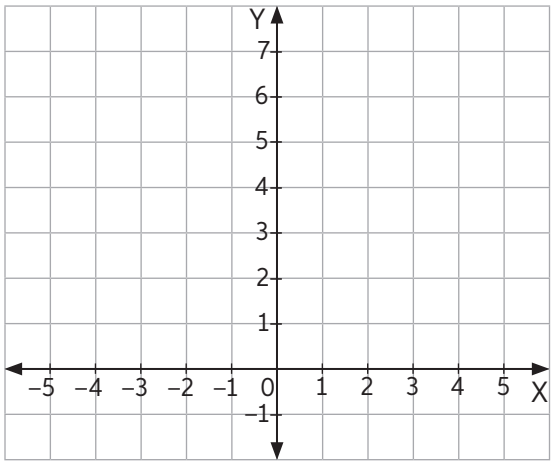
_____

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Representa las funciones $f(x) = 2^x$, $g(x) = 10^x$ y $h(x) = e^x$. Luego, responde.



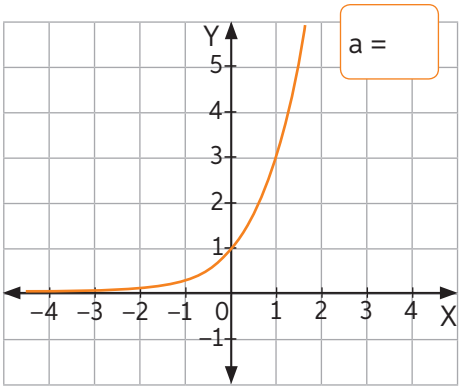
a. ¿Cuál es el dominio de cada función?, ¿cuál es su recorrido?

b. ¿Qué tipo de función es cada una: creciente o decreciente?

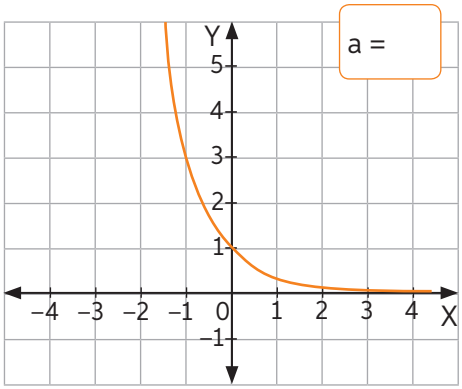
c. ¿Qué diferencias observas entre las funciones *g* y *h* respecto de la función *f*?

2. Analiza los siguientes gráficos de las funciones de la forma $f(x) = a^x$. Luego, escribe el valor de *a* correspondiente.

a.



b.

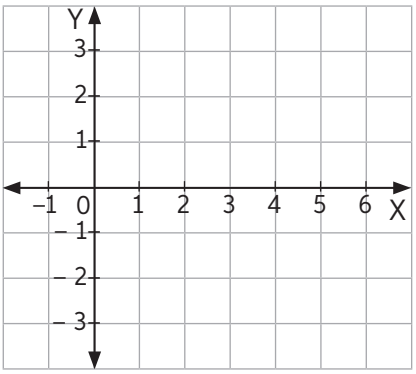


3. La cantidad de microorganismos presentes en un ecosistema crece exponencialmente según la fórmula: $P(t) = 4 \cdot 2^{2t} \cdot 10^3$, donde *t* representa el tiempo en horas. ¿Al cabo de cuántas horas habrá 64 000 microorganismos?

Función logarítmica

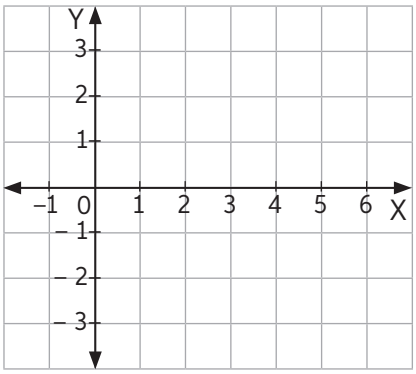
1. Representa en el plano cartesiano las siguientes funciones e indica si son crecientes o decrecientes.

a. $f(x) = \log_3 x$



Función: _____

b. $g(x) = \log_{0,5} x$



Función: _____

2. Determina, sin graficar, el dominio y el recorrido de las siguientes funciones logarítmicas.

a. $f(x) = \log_2(x + 3)$

b. $f(x) = 2 + \log_2 x$

3. Determina los puntos de intersección con los ejes de las siguientes funciones logarítmicas.

a. $f(x) = \log(x + 6)$

c. $g(x) = \log(x - 5)$

b. $h(x) = \log_3(x + 9) - 1$

d. $j(x) = \log_{\frac{1}{4}}(-x + 4)$

4. Evalúa si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

a. _____ Una función logarítmica f no puede tener valores negativos en su recorrido.

_____

b. _____ Si $a > b$, entonces $\log_a x > \log_b x$.

_____

c. _____ El dominio de una función logarítmica es siempre el conjunto de los números reales.

_____

d. _____ Si $f(x) = 1 + \log(x)$, la gráfica de la función $g(x) = \log(x) - 3$ corresponde a la gráfica de $f(x)$ trasladada 4 unidades horizontalmente hacia los negativos.

_____

5. Determina qué condición debe cumplir a, en cada caso, para que las siguientes funciones sean decrecientes o crecientes.

a. $f(x) = \log_{(a+1)} x$

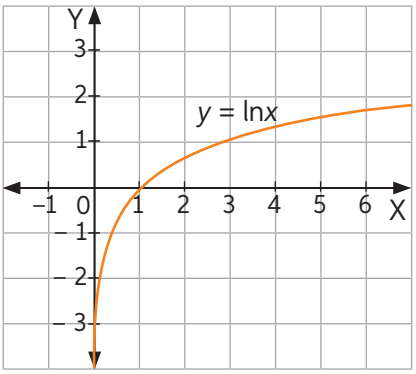
b. $g(x) = \log_{(6a+5)} x$

c. $h(x) = \log_{(-3a)} x$

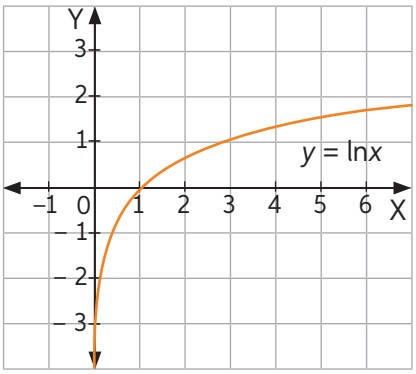
d. $j(x) = \log_{(6-3a)} x$

6. Construye la gráfica de las siguientes funciones logarítmicas considerando el gráfico de $y = \ln x$.

a. $f(x) = \ln(x - 2) + 1$



b. $g(x) = -\ln(x) + 1$



Actividad de aplicación Relación entre el área corporal de una persona, su masa y su estatura

¿Qué haremos? Aplicar el modelo que relaciona el área de la superficie corporal de una persona, su masa y su estatura.

La relación entre el área de la superficie corporal a (m^2) de una persona, su masa m (kg) y su estatura h (cm) está dada por la expresión:

$$\log(a) = -2{,}144 + 0{,}425\log(m) + 0{,}725\log(h)$$

Planifiquemos

Paso 1: Reúnanse en parejas y consigan una huincha de medir y una balanza digital. Luego, midan la estatura y la masa corporal de 5 compañeros de curso.

Ejecutemos

Paso 2: Registren la información en la siguiente tabla. Mientras uno mide a sus compañeros, el otro escribe en la tabla.

Nombre compañero	Estatura (cm)	Masa corporal (kg)
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

Paso 3: Apliquen el modelo descrito anteriormente y estimen el área de la superficie corporal de cada uno de ellos. Usen una calculadora.

Paso 4: Elaboren una estrategia para verificar si fue buena la estimación del modelo anterior. Descríbanla.

Presentemos

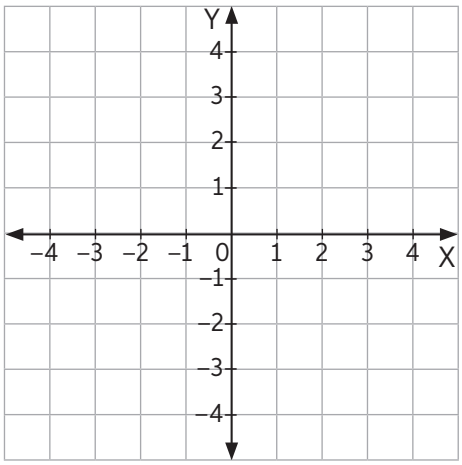
Paso 5: Expongan su trabajo ante el curso y comenten si el resultado de su estrategia se acercó al modelo matemático.

Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

1. Representa las siguientes funciones logarítmicas y sus funciones inversas.

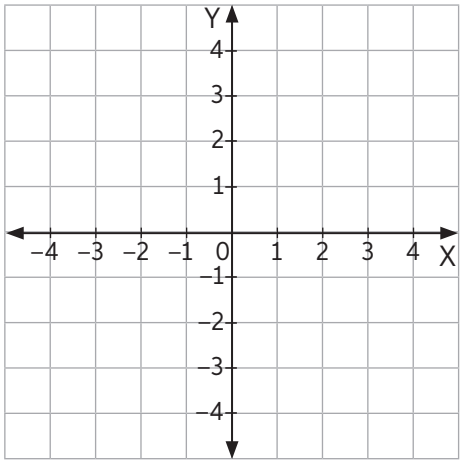
a. $f(x) = \log_3 x \rightarrow f^{-1}(x) =$ _____

x	$f^{-1}(x)$
–2	
–1	
–0,5	
0	
0,3	
0,5	
1	
2	



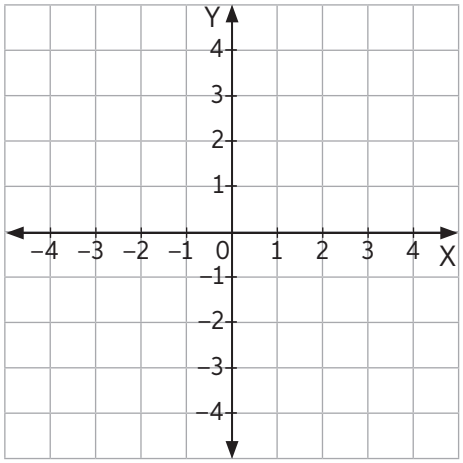
b. $g(x) = \log_{1,4} x \rightarrow g^{-1}(x) =$ _____

x	$g^{-1}(x)$
–2	
–0,5	
0	
0,3	
0,6	
1	
1,5	
2	



c. $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \rightarrow h^{-1}(x) =$ _____

x	$h^{-1}(x)$
–2	
–1	
–0,3	
0	
0,5	
1	
2	



2. Determina algebraicamente la función inversa de las siguientes funciones exponenciales.

a. $f(x) = 4^x$

b. $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

3. Se sabe que el pH de una solución se calcula mediante la fórmula

$$pH = -\log[H^+],$$

donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles/litro.

a. Describe el procedimiento que usas para determinar los iones de hidrógeno de una sustancia si conoces su pH.

b. Aplica el procedimiento anterior y calcula la concentración de iones de hidrógeno de la sustancia de la imagen.

Jugo de limón:
pH aproximado de 1,7.

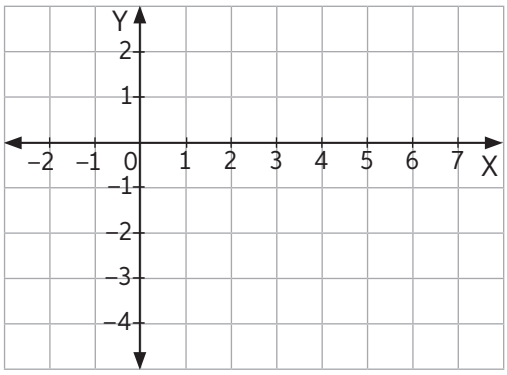
c. ¿Qué propiedades de los logaritmos usaste en la actividad anterior?

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Grafica la función $g(x) = \log(x + 1) - 2$. Luego, responde.



a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido?

_____

b. ¿Es una función creciente o decreciente?, ¿por qué?

_____

2. Resuelve los problemas. Utiliza calculadora si es necesario.

a. Al momento de morir, un organismo contiene 50 mg de átomos de carbono 14. La cantidad C(x) de carbono 14 que queda en el organismo x años después se ajusta al modelo: $C(x) = 50 \cdot e^{-0,000119x}$. ¿Después de cuánto tiempo de la fecha de muerte del organismo le quedará 0,8 mg de carbono 14?

b. El número de habitantes en millones de cierta ciudad se puede calcular utilizando la expresión $P(t) = 2^3 \cdot 10^{\frac{2t}{3}}$. Si t representa el tiempo en años, ¿cuánto tiempo aproximado debe transcurrir para que la población de la ciudad sea de 200 millones de habitantes?

c. ¿Cuál es la relación que hay entre los logaritmos y los problemas que resolviste anteriormente? Explica.

_____

_____

Lección 5 Resolución de problemas con ángulos en la circunferencia

Ángulos del centro e inscrito en una circunferencia

1. Construye una figura que cumpla con todos los elementos que se indican. Luego, calcula el valor de x.

a.

- Circunferencia de centro O.
- Diámetro $\overline{AB}$.
- Ángulo inscrito: $\sphericalangle OAC$; m($\sphericalangle OAC$)= 50°.
- Ángulo del centro: $\sphericalangle BOC$; m($\sphericalangle BOC$) = x

Construcción

b.

- Circunferencia de centro O.
- Diámetro $\overline{AC}$, cuerda $\overline{AB}$, radio $\overline{BO}$.
- Ángulo del centro: $\sphericalangle BOC$
- m($\sphericalangle COB$) = 120°
- Ángulo inscrito: $\sphericalangle CAB$;
- m($\sphericalangle CAB$) = x

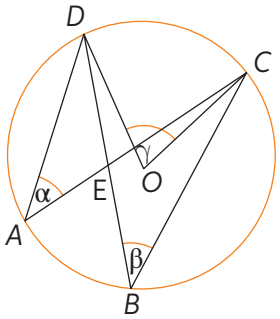
Construcción

c.

- Circunferencia de centro O.
- Puntos A, B y C sobre la circunferencia, separados más de 100° de arco entre sí.
- Segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$.
- Cuerdas AC y BC.
- Ángulo del centro: $\sphericalangle AOB$
- m($\sphericalangle AOB$) = 150°
- Ángulo inscrito: $\sphericalangle ACB$; m($\sphericalangle ACB$) = x

Construcción

2. En la circunferencia de centro O, $\alpha + \beta = 58°$.



a. ¿Cuál es el valor de γ? Calcúlalo.

b. Explica el procedimiento que utilizaste para resolver el problema.

_____

_____

3. En parejas, realicen la siguiente actividad:

a. Utilicen Geogebra para demostrar geométricamente que la medida del ángulo del centro es el doble que la de un ángulo inscrito en el mismo arco.

b. Detallen el procedimiento que utilizaron en su demostración. Impriman la construcción final de su demostración y péguenla.

Procedimiento	Construcción
_____	
_____	
_____	
_____	

c. Reúnanse con otras parejas y comparen sus construcciones. ¿Qué diferencias hay?

_____

_____

d. ¿Qué otro procedimiento en GeoGebra podrían haber utilizado? Expliquen.

_____

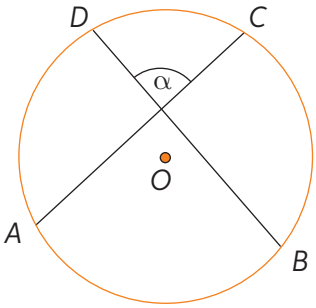
_____

Lección 5

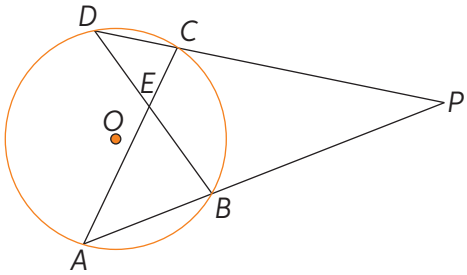
Ángulos interiores y exteriores en la circunferencia

1. Resuelve.

a. El arco $\widehat{DA}$ mide 80° y el arco $\widehat{BC}$ mide 85°. ¿Cuál es la medida de α?



b. La medida de $\sphericalangle AED$ es 138° , la medida angular del arco $\widehat{BC}$ es 102° y la de $\sphericalangle APC$ es 36°. ¿Cuál es la medida del arco $\widehat{AD}$?, ¿y la del $\sphericalangle AED$?



2. En parejas, realicen la siguiente actividad:

a. Utilicen GeoGebra para demostrar geométricamente que la medida del ángulo formado en el cruce de dos cuerdas equivale a la semisuma de los arcos subtendidos por la prolongación de los lados de dicho ángulo y su opuesto por el vértice.

b. Detallen el procedimiento que utilizaron en su demostración. Impriman la construcción final de su demostración y péguenla.

Procedimiento

Construcción

c. Reúnanse con otras parejas y comparen sus construcciones. ¿Qué diferencias hay?

_____

_____

d. ¿Qué otro procedimiento en GeoGebra podrían haber utilizado? Expliquen.

_____

_____

Actividad de aplicación

Ángulos interiores y exteriores en una circunferencia a través de un cuento

¿Qué haremos? Crear un cuento que muestre un problema que se resuelva utilizando la relación de ángulos interiores y exteriores en una circunferencia.

Planifiquemos

Paso 1: Reúnanse en grupos de 3 o 4 personas. Realicen un resumen de los teoremas que utilizarán para explicar la relación entre los ángulos interiores y exteriores en una circunferencia.

Paso 2: Decidan en qué formato entregarán su cuento (digital, impreso, etc.), los recursos y/o materiales que necesitan y el tiempo estimado en su confección.

- Formato: _____
- Recursos y/o materiales

  _____
- Tiempo empleado: _____
- Tareas de cada integrante:

Ejecutemos

Paso 3: Confeccionen su cuento. Recuerden ser creativos y utilizar un lenguaje claro.

Paso 4: Den a conocer sus cuentos. Si es digital, pueden utilizar sus redes sociales para publicarlos. De lo contrario, intercámbienlos con otros grupos.

Discutamos

Paso 5: Luego de analizar y leer los demás cuentos, respondan:

- ¿En qué situaciones específicas de los cuentos se muestra un ejemplo de un ángulo interior en una circunferencia?, ¿y de un ángulo exterior?, ¿cómo lo resolvieron los personajes del cuento? Expliquen.

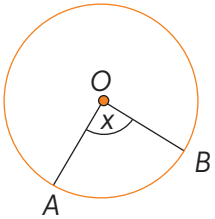
Antes de continuar

Evaluación intermedia

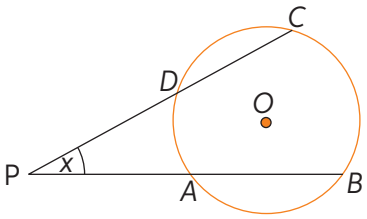
Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Indica el tipo de ángulo que representa x en cada caso.

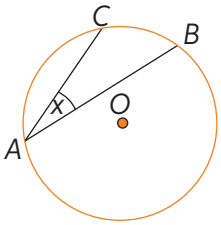
a.



b.

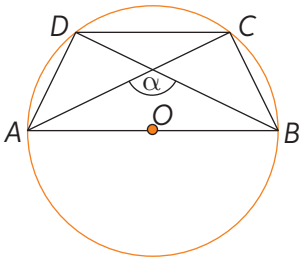


c.

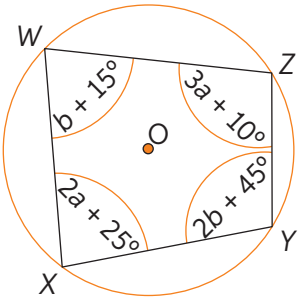


2. Resuelve. Luego, en parejas, compara el procedimiento utilizado.

a. Si la medida angular de $\overset{\frown}{CD}$ es 70°, ¿cuál es la medida de α?



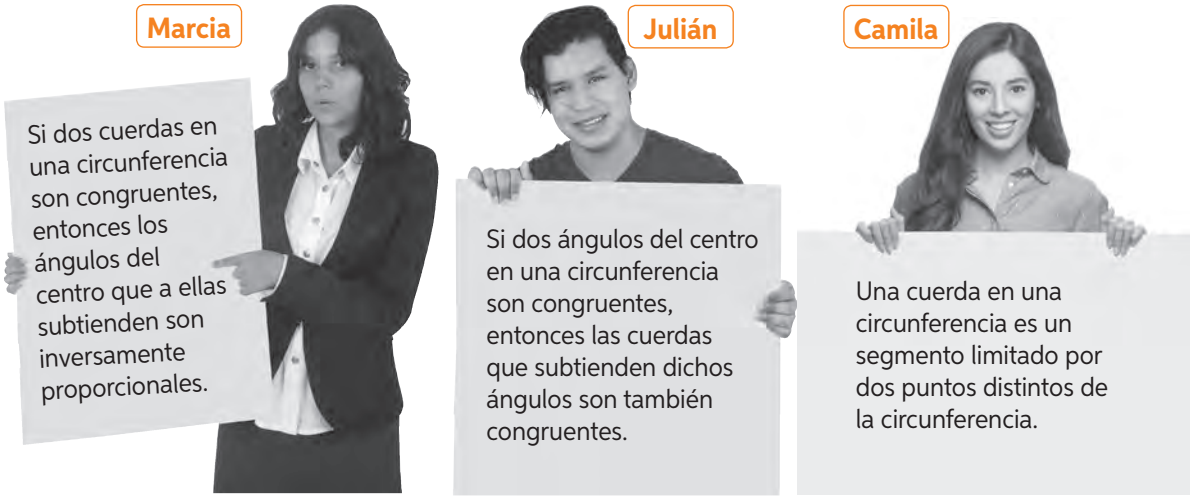
b. ¿Cuál es la suma de las medidas de $\sphericalangle XWZ$ y $\sphericalangle YXW$?



3. Inventa un problema que contenga los diferentes tipos de ángulos vistos en la Lección. Represéntalo y resuélvelo.

Cuerdas en la circunferencia

1. Analiza el cartel sostenido por cada estudiante.



¿Cuál(es) de las afirmaciones es (son) verdadera(s)?, ¿cuál(es) es (son) falsa(s)? Justifica.

_____

2. Representa los problemas y resuélvelo.

a. Dos cuerdas en una circunferencia se intersecan de tal forma que los segmentos que se forman en una de estas miden 4 cm y 6 cm. Si la longitud de uno de los segmentos formados en la otra cuerda es 3 cm, ¿cuál es la longitud del otro segmento?

Representación	Desarrollo

Procedimiento: _____

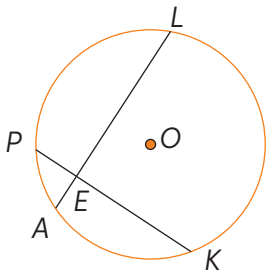
b. Dos cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ se intersecan en el punto H. Calcula la medida del segmento $\overline{EH}$, sabiendo que AB = 146 cm, FH = 72 cm y AH = 90 cm.

Representación	Desarrollo

Procedimiento: _____

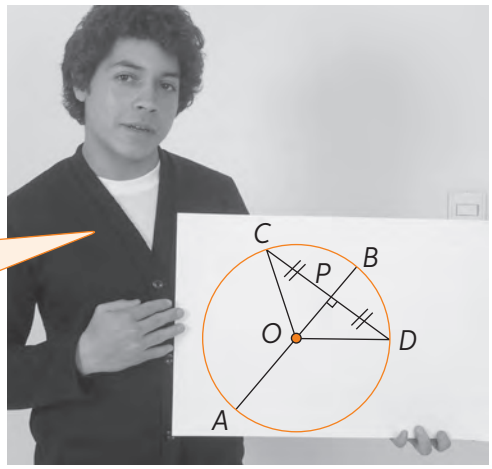
3. Resuelve el problema. Luego, explícale a un compañero la estrategia que utilizaste.

¿Cuál es la longitud de $\overline{PK}$ si $LE = (14 - 2m)$ cm, $AE = (m + 4)$ cm, $EK = (10 - 2m)$ cm y $PE = (m + 5)$ cm?



4. Analiza lo que descubrió Tomás durante la clase de Matemática. Luego, realiza las actividades.

Si un diámetro de la circunferencia interseca perpendicularmente una cuerda, entonces esta se divide en mitades.



a. Construye la figura anterior utilizando GeoGebra. Varía el diámetro de la circunferencia y comprueba que esto se cumple. Anota los datos para 5 diferentes valores de diámetro.

Diámetro	*CP*	*DP*

b. ¿Qué pasos utilizaste en tu construcción? Descríbelos.

_____

_____

c. En parejas, comparen el procedimiento de sus construcciones. ¿Utilizaron los mismos pasos? ¿Qué diferencias hay entre sus procedimientos?

_____

Secantes y tangentes en la circunferencia

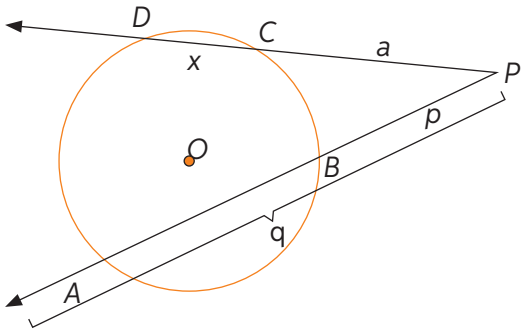
1. Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Luego, escribe V o F según corresponda y justifica las falsas.

a. _____ Una recta secante a una circunferencia está limitada por dos puntos de esta.

b. _____ Una recta secante a una circunferencia debe cortar la circunferencia solo en un punto.

c. _____ Dos secantes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son congruentes con los segmentos exteriores a la circunferencia.

2. Analiza la siguiente figura y realiza las actividades.



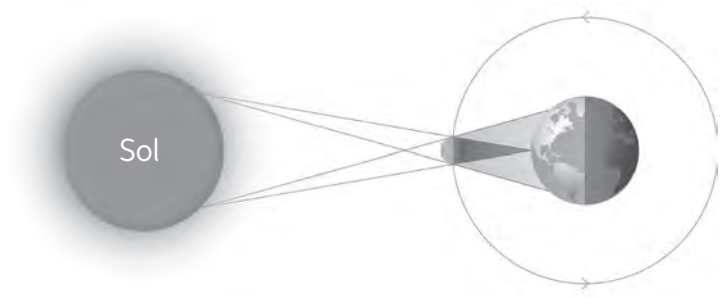
a. Aplica el teorema de las secantes para establecer la ecuación correspondiente.

b. A medida que disminuye x, ¿a qué elemento se asemeja la secante $\overline{PD}$?

c. Si x toma el valor de 0, ¿qué elemento de la circunferencia sería $\overline{PD}$?

d. Reemplaza el valor de $x = 0$ en la ecuación. ¿Qué expresión obtienes? Explica.

3. Analiza el siguiente diagrama. ¿Qué elementos de las circunferencia identificas?



4. Usando las imágenes a continuación, crea un problema en la que se deban utilizar los contenidos trabajados en el tema de secantes y tangentes en la circunferencia . Compártelo con tu compañero y luego resuelve ambos problemas.

Tu problema
Problema del compañero

Resolución de tu problema:

Resolución del problema de tu compañero

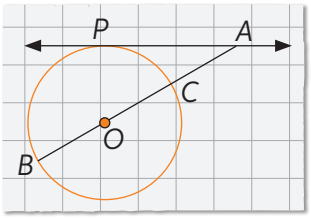
Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que revises cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Resuelve el problema.

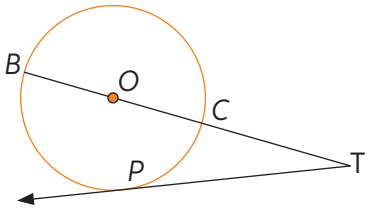
Constanza dibujó una circunferencia de centro O.



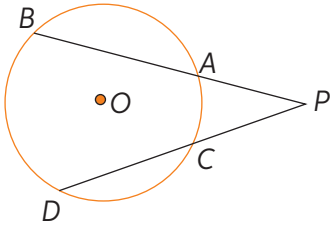
En la figura anterior, $\overleftrightarrow{PA}$ es tangente a la circunferencia en P, $PA = 6$ cm y $AB = 3PA$. ¿Cuál es la medida del diámetro de la circunferencia que dibujó Constanza?

2. Resuelve.

a. $\overleftrightarrow{PT}$ es tangente a la circunferencia en P, $\overline{PT}$ mide 8 cm y $\overline{CT}$ mide 4 cm. ¿Cuál es la medida de $\overline{BT}$?



b. La cuerda $\overline{DC}$ mide 7 cm y su extensión al punto P es de 1 cm. El segmento $\overline{AP}$ mide 2 cm. ¿Cuál es el doble de la longitud $\overline{AB}$?



3. Inventa un problema que se resuelva utilizando los teoremas vistos en esta Lección y resuélvelo.

Problema

Estrategia, desarrollo y solución

Lección 7 El conjunto de los números complejos (ℂ)

Conjunto de los números complejos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones. Luego, indica todos los conjuntos numéricos a los que pertenezcan sus soluciones.

a. $2x = 5x - (x + 10)$

b. $10x - \frac{15 + x}{2} = 11x$

c. $3 + (x + 2)(x + 1) = x(x - 1)$

d. $3x^2 + 75 = 0$

e. $x^2 - 64 = 0$

f. $x^2 - 3x + 3 = 0$

2. Calcula las siguientes potencias.

a. $(5i^3)^5 + (i^2)^3 =$ _____

b. $12(i^4)^4 - (2i^3)^2 =$ _____

c. $-5(i^5)^3 - (2i^5)^2 =$ _____

d. $\frac{i^{40}}{i^{12}} \cdot i^{175} =$ _____

3. Completa la tabla con la parte real e imaginaria de cada número complejo.

z	$3 + 8i$	$-4 - 7i$	$12{,}2 - 0{,}78i$	$-5 + \frac{3}{8}i$	$\sqrt{7} - \frac{4}{9}i$	$2\sqrt{7} - 3\frac{\sqrt{5}}{2}i$
Re(z)						
Im(z)						

4. Calcula para qué valores reales ***m*** y ***n*** los números complejos ***z*** y ***w*** son iguales.

a. $z = (3 - 4m) + ni$

$w = 1 + 2i$

$m =$ _____

$n =$ _____

b. $z = 5(1 - n) + 10i$

$w = 1 - 6mi$

$m =$ _____

$n =$ _____

c. $z = 18ni$

$w = 6m + (1 + n)i$

$m =$ _____

$n =$ _____

d. $z = 14i$

$w = 8m + (n^2 + 1)i$

$m =$ _____

$n =$ _____

5. Resuelve los problemas. Considera que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}i$

Si $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} + 3$ y $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = 6$, ¿cuál es el número $\boldsymbol{z}$?

Si $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} - 3$ y $\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q} = 9$, ¿cuál es el número $\boldsymbol{z}$?

Lección 7

Representación de números complejos

1. Representa en el plano de Argand los vectores asociados a cada número complejos.

$z_1 = (7, 6)$

$z_2 = (-5, -1)$

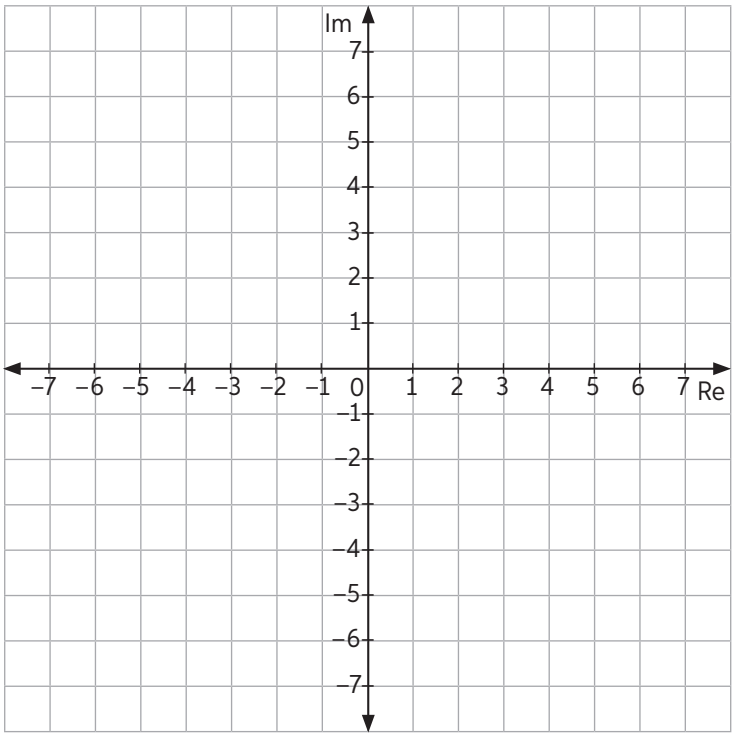
$z_3 = -2i$

$z_4 = 3{,}5 - 1{,}5i$

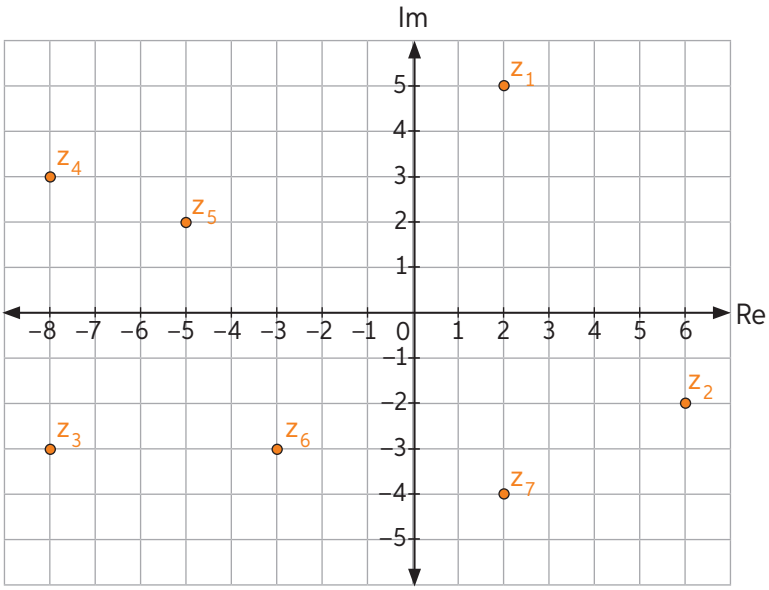
$z_5 = \left(7, -\frac{7}{2}\right)$

$z_6 = -7i + 4$

$z_7 = \left(-\frac{5}{2}, -6\right)$



2. Analiza el siguiente plano de Argand. Luego, Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa. Compara tus respuestas con un compañero.



a. _____ La parte real de z_1 es 5.

b. _____ La parte imaginaria de z_2 es −2.

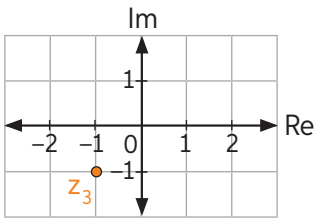
c. _____ La forma binomial de z_3 es $8 - 3i$.

d. _____ z_7 escrito como par ordenado es (−2, −4).

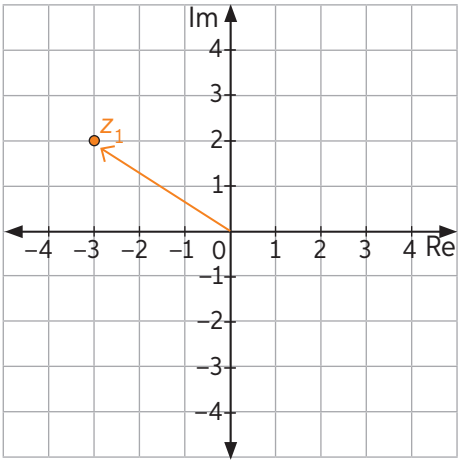
e. _____ Los números complejos z_3 y z_4 están en el mismo cuadrante.

f. _____ La parte real de z_5 es mayor que la parte real de z_6.

3. Completa la siguiente tabla según la representación de número complejo pedida.

Forma binomial	Par ordenado	Representación gráfica
$z_1 = \frac{1}{2} - 2i$		
	$z_2 = (3, 5)$	
		
$z_4 = 3 - i$		

4. Resuelve el problema.
Joaquín debe descubrir los números complejos z_2 y z_3. Para esto, cuenta con la siguiente información.



- La representación de z_2 equivale a realizar una reflexión de z_1 con respecto al eje imaginario.
- La representación de z_3 equivale a realizar una reflexión de z_2 con respecto al eje real.

a. Representa z_2 y z_3 en el plano anterior.

b. ¿Cuál es la forma binomial de z_2 y z_3? Escríbelas.

z_2 = _____ z_3 = _____

Lección 7

Módulo y conjugado de un número complejo

1. Calcula el módulo de los siguientes números complejos. Luego, ordena sus módulos de menor a mayor.

a. $z_1 = -3 + 4i$

b. $z_2 = (-3, 3)$

c. $z_3 = -1i$

d. $z_4 = -\frac{4}{5} + \frac{2}{3}i$

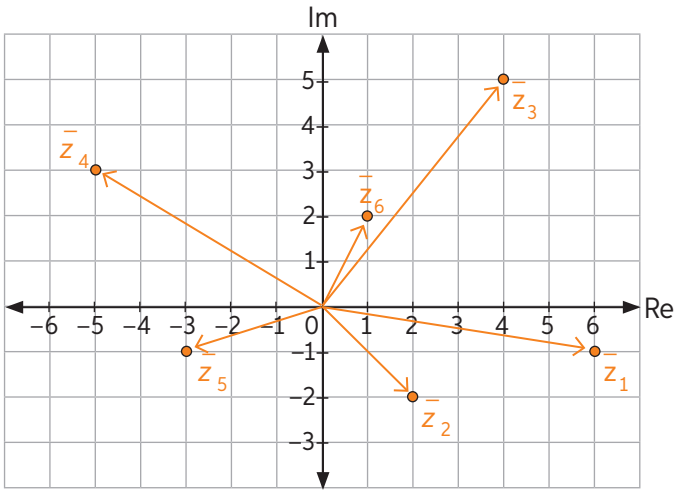
e. $z_5 = 4\sqrt{3} - 7\sqrt{5}\,i$

f. $z_6 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + 4\sqrt{3}\,i - 7\sqrt{5}\,i$

g. $z_7 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + i$

h. $z_8 = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}}{2}i$

2. En el plano de Argand se muestran los conjugados de 6 números complejos.



Escribe cada número complejo de forma binomial.

a. $z_1 =$ _____

b. $z_2 =$ _____

c. $z_3 =$ _____

d. $z_4 =$ _____

e. $z_5 =$ _____

f. $z_6 =$ _____

Actividad de aplicación Juego de tablero con números complejos

¿Qué haremos? Confeccionar un juego que simule el plano de Argand.

Planifiquemos

En parejas, deben construir lo siguiente:

- 1 tablero cuadrado cuadriculado que represente el plano de Argand.
- 2 dados de 6 caras: una para el eje real y otro para el eje imaginario.
- 1 ficha que contenga signo "+" en una cara y signo "–" en la otra.

Paso 1: Conversen acerca de cómo construirán el tablero. Para esto, anoten los siguientes aspectos:

- Materiales que necesitan para la construcción.

  _____

  _____

  _____

- Tiempo destinado a la confección del tablero.

  _____

- Objetos que simularán su ficha (ejemplo: moneda).

  _____

- Instrumento para medir el tiempo durante el juego (ejemplo: cronómetro).

  _____

Paso 2: Detallen en una hoja el procedimiento que utilizarán en la confección del juego.

Juguemos

Paso 3: Establezcan, al reverso de su hoja, las reglas del juego en las que se utilice el cálculo del módulo de un número complejo y/o el conjugado de manera tal que siempre haya un ganador. Luego, comiencen a jugar. Un ejemplo de regla es el siguiente:

"Cada jugador debe lanzar el dado del eje real y la ficha para determinar el valor y el signo del número de la parte real del número complejo. Lo mismo debe realizar para formar la parte imaginaria. Luego, debe marcar el número complejo en el plano Argand, mientras su rival intenta encontrar el módulo de dicho número complejo. Gana quien logre su objetivo en menos tiempo."

Discutamos

Paso 4: Luego de jugar, discutan de acuerdo a las siguientes preguntas:

- ¿Dónde notaron mayor dificultad en el juego?, ¿por qué?
- ¿Qué estrategia usaron para desarrollar de manera más rápida los cálculos?
- Si tuvieran que agregar alguna regla para aumentar la dificultad, ¿cuál sería?

Antes de continuar

Evaluación intermedia

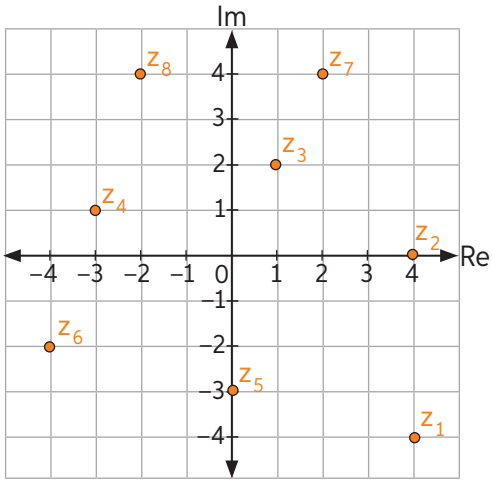
Realiza las siguientes actividades para que revises cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Resuelve las ecuaciones e indica a qué conjunto numérico pertenecen sus respectivas soluciones. En caso de que pertenezcan al conjunto de números complejos, indica su parte real e imaginaria.

a. $x^2 + 2 = 2x$

b. $2x^2 - x + 15 = 0$

2. Realiza las siguientes actividades utilizando la información del siguiente plano de Argand.



a. Representa en el plano anterior el vector de los conjugados de z_1, z_3 y z_4.

b. Escribe en forma binomial z_5, z_6, z_7 y z_8, y como par ordenado a z_1, z_2, z_3 y z_4.

z_1 = _____ z_3 = _____ z_5 = _____ z_7 = _____

z_2 = _____ z_4 = _____ z_6 = _____ z_8 = _____

c. ¿Cuál es el módulo de z_5, z_6, y z_7? Calcúlalos.

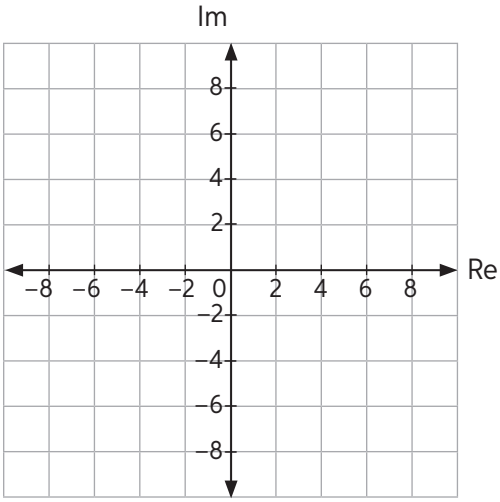
z_5 = _____ z_6 = _____ z_7 = _____

d. Analiza las siguientes afirmaciones. Luego, anota y justifica V o F en cada caso.

- _____ El módulo de z_5 es mayor que el módulo del conjugado de z_7
- _____ z_7 es igual al conjugado de z_8.
- _____ La parte imaginaria de z_6 es mayor que la parte imaginaria de z_4.

Adición y sustracción de números complejos

1. Representa en el plano de Argand el vector resultante de las siguientes operaciones combinadas:



a. $z = (3, 2) - (0, 4) - (5, 5) + (2, 0)$

b. $w = (3 + 4i) + (2 + 3i) - (i - 2)$

c. $u = (-2, 4) + (7, -4) + (-12, 7)$

d. $v = (8i + 3) + (-2 + 2i) - (3 + 4i)$

2. Calcula los valores de ***a*** y ***b*** para que se cumpla la igualdad.

a. $3a + 2 - 4bi - i = 5a - 2i + 5bi - 3$

b. $(2a + 7, 3b - 3) = (-3 - 2a, 7b)$

c. $4i - 5 + 3bi - a = 5ai - 5 + 9bi$

d. $(5b, 4 + 7a) = (2a - 2, -3)$

3. Expresa el resultado de cada operación en la forma de par ordenado y binomial.

a. $(18 + 4i) + (-11 + 23i)$

b. $(2, 7) + (-13, 0)$

c. $(3i - 4) - (18 + 5i)$

d. $(2{,}5; 9{,}3) - (5{,}6; -4{,}2) + (7{,}4; 3)$

e. $(-22, 19) - (32, -16)$

f. $-(3{,}9 + 2i) + (7{,}5 - 3{,}7i) - (2{,}6 + 4{,}087i)$

4. Resuelve los problemas.

a. Si $x = 4 - 2i$ e $y = -8 + 5i$, ¿cuál es el valor de $\bar{x} - \bar{y}$?

b. Si $z + \bar{z} = 10$, ¿qué valor podría tener z?

c. Si $z = \frac{2}{3} - \frac{4}{5}i$, ¿cuál es el valor de $|z - \bar{z}|$?

Multiplicación de números complejos

1. Realiza la ponderación de los siguientes números complejos. Escribe el resultado de forma par ordenado y binomial.

a. $(2,0) \cdot (3,6; 7,2)$

b. $3 \cdot (3,8 - 2,7i)$

c. $(-3, 0) \cdot (-5,2; 0) \cdot (2,7; -3,8)$

d. $4,2 \cdot (7,2 - 0i) \cdot (3,09 - 4,8i)$

2. Multiplica y simplifica los siguientes números complejos:

a. $(-4 + 4i) \cdot (3 + 2i)$

b. $(5 + 3i) \cdot (4,5 + 7,8i)$

c. $(3,4; -5,2) \cdot (-2,9; 6,8)$

d. $(5,3; 7,1) \cdot (-4,3; 2,8)$

3. Desarrolla las siguientes potencias y calcula el resultado final.

a. $(2 - 3i)^2 - (5 - 2i)^3$

b. $(-5 + 4i)^3 + (2,5 - 3i)^2$

c. $(-3 + 4i)^2 - (7 - 2i)^2$

d. $(6 + 14i)^4 + (7 - 12i)^2$

4. Encuentra el valor de k que pondera a cada número complejo.

a. $k(2, 3) = (10, 15)$

b. $k(7, 8) = (-14, -16)$

c. $k(-2, 1) = (-12, 6)$

d. $k(-5, -4) = (15, 12)$

e. $k(7, 2) = \left(\frac{7}{2}, 1\right)$

f. $k(-1, -7) = \left(\frac{3}{4}, \frac{21}{4}\right)$

5. Si $\boldsymbol{z}$ corresponde al resultado de la operación $(3 - i)(4 + 7i)(-8 + 2i)$, ¿cuál es el valor del inverso aditivo de $\boldsymbol{z}$?

División de números complejos

1. Calcula. Luego, escribe el resultado de forma binomial.

a. $\frac{3 - 3i}{5 + i}$

b. $\frac{2 + 5i}{6 - 6i}$

c. $\frac{2{,}5 + 0{,}9i}{3{,}6 - 5{,}6i}$

d. $\frac{-3{,}7 - 5{,}9i}{4{,}2 + 7{,}4i}$

e. $\frac{(3,\ 8)}{(-3,\ -7)}$

f. $\frac{(12,\ -7)}{(5,\ -6)}$

g. $\frac{(4{,}6;\ 2{,}6)}{(2{,}9;\ -4)}$

h. $\frac{(9{,}2;\ -3{,}6)}{(7{,}2;\ -0{,}4)}$

2. Calcula el inverso multiplicativo de los siguientes números complejos.

a. $7 + 3i$

b. $6 - 2i$

c. $14 - 1{,}1i$

d. $0{,}1 - 10i$

3. Analiza la situación. Luego, responde.

Marcelo anotó el desarrollo de $(5 + 7i) : (3 - 4i)$ en su cuaderno. Sin embargo, su profesora notó que era incorrecto:

$$\frac{(5+7i)(3-4i)}{\left(\sqrt{3^2+(-4)^2}\right)^2} = \frac{15-20i+21i-28i^2}{(\sqrt{9+16})^2}$$

$$= \frac{15+i-28\cdot -1}{25} = \frac{15+28+i}{25}$$

$$= \frac{42}{25} + \frac{1}{25}i$$

a. ¿Cuál fue el error de Marcelo? Descríbelo.

b. Corrige el desarrollo y calcula el resultado de la operación.

Antes de continuar

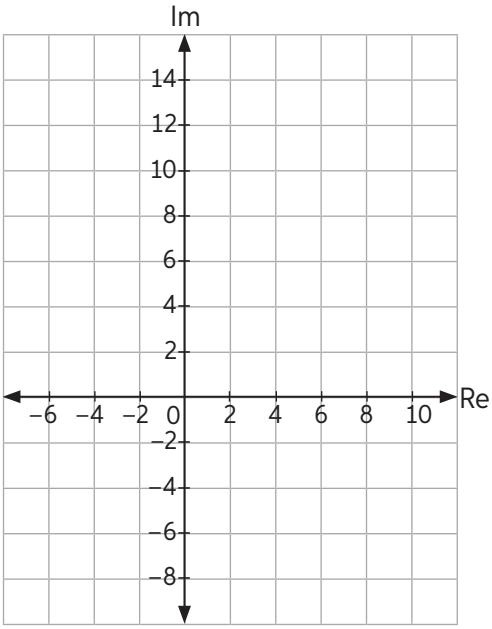
Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que revises cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Dado el número complejo $z_1 = 2 + 4i$, calcula y representa los siguientes números complejos:

a. $z_2 = 3z_1$

b. $z_3 = -z_1 + \frac{1}{2}z_1$



2. Calcula el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de cada número complejo. Completa la tabla.

z	$-z$	z^{-1}
$(0, -3)$		
$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$		

3. Observa la situación.

Matilde y José discuten sobre una propiedad que cumple z, con $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Verifica lo que dice cada uno: ¿quién está en lo correcto? Justifica tu respuesta con ejemplos.

UNIDAD 1 La toma de decisiones en situaciones de incerteza

Lección 1 Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión

Página 4 Medidas de dispersión

1.

a. $R = 15$, $\sigma^2 = 38{,}16$ y $\sigma \approx 6{,}18$.

b. $R = 12$, $\sigma^2 = 24{,}56$ y $\sigma \approx 4{,}96$.

2. $\bar{x} = 4{,}1$ y $\sigma^2 = 2{,}24$.

Página 5

3.

a. $R = 8900$, $D_{\bar{x}} = 2146{,}94$ y $\sigma^2 \approx 8288163{,}27$.

b. Notemos que tanto el promedio como la desviación estándar son mayores que los números requeridos, por lo tanto, el médico no debe cambiar de tratamiento.

c. $\sigma \approx 2878{,}92$

Página 6 Comparación de conjuntos de datos

1.

a. F. Todo dato mayor a 6 pertenece al cuarto cuartil.

b. V.

c. F. También tiene mayor dispersión.

d. V.

e. F. Fue superior a 5,9 en los tres cursos. 5,6 es superior a 5,5, pero no cumple con estar dentro del 50%.

2. El 2° medio A tiene mejor rendimiento, ya que tiene menor CV (29,62 %).

3.

a. CV clavos: 21,59 % y CV varas: 8,46 %.

b. Los clavos son los datos con mayor CV, por lo tanto más heterogéneos. Debe pedir que le manden una muestra más homogénea de clavos.

Página 7

4. Juan tiene una desviación estándar menor, por lo que su rendimiento es más homogéneo. Se debería contratar a Juan.

Página 8 Antes de continuar

1.

a. $\bar{x} \approx 57$ minutos.

b. $\sigma^2 = 71{,}71$ min^2 y $\sigma = 9{,}47$ min.

c. El promedio es mayor a 55 minutos, pero la desviación estándar es menor a 45 minutos. No debe preocuparse.

2.

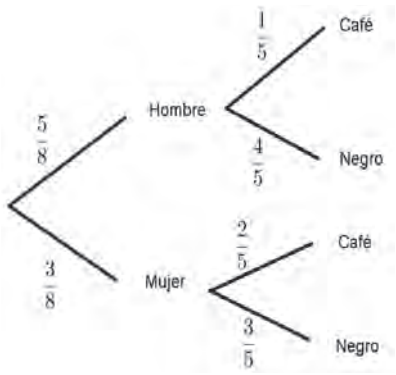
a. Para 3° medio A: $\bar{x}_A \approx 5{,}33$, $\sigma_A \approx 1{,}22$ y CV $\approx 22{,}94$ %.
Para 3° medio B: $\bar{x}_B \approx 5{,}39$, $\sigma_B \approx 1{,}13$ y CV $\approx 20{,}95$ %.

b. No, ya que el 3° medio B tiene mejor promedio y sus datos son más homogéneos, porque tiene menor desviación estándar y menor CV.

Lección 2 Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales

Página 9 Probabilidad condicionada

1.



La probabilidad es $\frac{1}{5}$.

2. La probabilidad de que ambos tengan metales no permitidos es $\frac{14}{33}$.

Página 10

3.

a. $\frac{64}{120}$

b. $\frac{18}{55}$

c. $\frac{6}{13}$

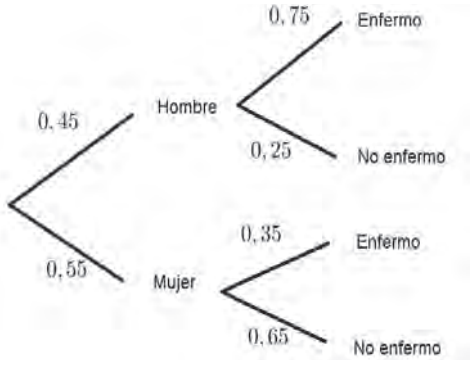
d. $\frac{43}{134}$

4. Leonor tiene una probabilidad igual a 0,35 y Jacinta, una probabilidad aproximada de 0,31. Leonor tiene mayor probabilidad de aprobar.

Página 11 Probabilidad total

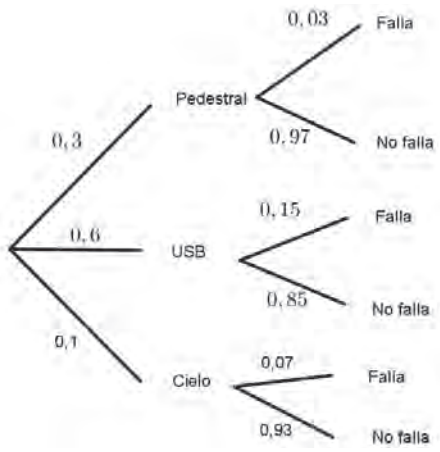
1. El tercer suceso es más probable.

2.



La probabilidad que haya estado enfermo es 0,53.

3.

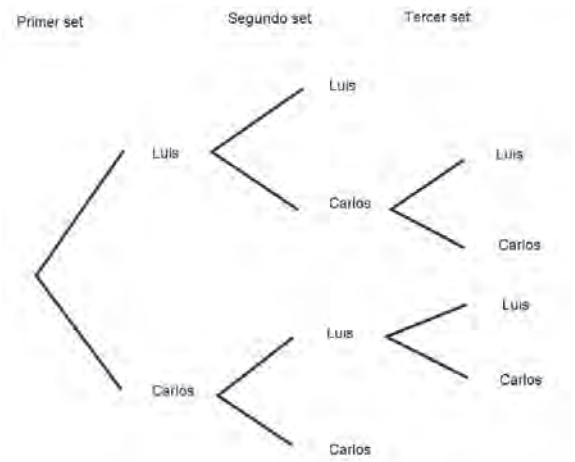


La probabilidad de que falle es 0,106.

Página 12

4.

a.



b. La probabilidad es 0,648.

5. La probabilidad es de $\frac{6}{11}$.

Página 13 Antes de continuar

1.

a. F. Porque $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{16}$.

b. V.

c. F. Usando los resultados de a, tenemos que $P(A/B) = \frac{3}{16}$, pero $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$.

d. F. No es necesario conocer $P(A)$, pero si se debe conocer $P(A \cap B)$.

2.

a. La probabilidad de estar enfermo es $\frac{135}{242}$ y de estar sano es $\frac{107}{242}$.

b. La probabilidad de estar enfermo dado que es fumador es $\frac{20}{27}$ y la probabilidad de estar enfermo dado que no es fumador es $\frac{3}{13}$.

c. La probabilidad de estar sano dado que es fumador es $\frac{7}{27}$ y la probabilidad de estar sano dado que no es fumador es $\frac{13}{16}$.

UNIDAD 2 Modelamiento matemático para describir y predecir

Lección 3 Modelamiento de fenómenos con la función exponencial

Página 14 Función exponencial

1.

a. No.

b. Sí.

c. Sí.

d. No.

e. No.

f. Sí.

2.

a. F. La función $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ es creciente

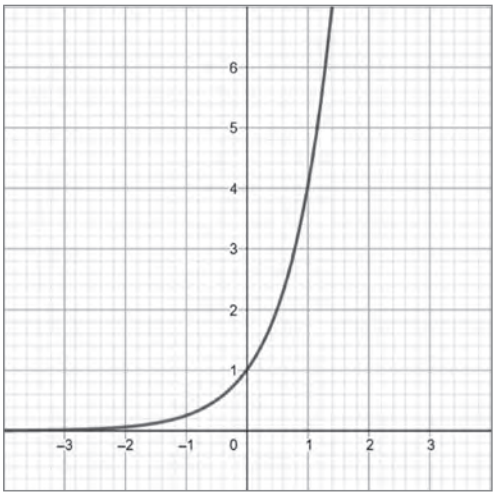
b. F. Pueden ser fracciones impropias que equivalen a bases mayores a 1.

c. V.

3.

a.

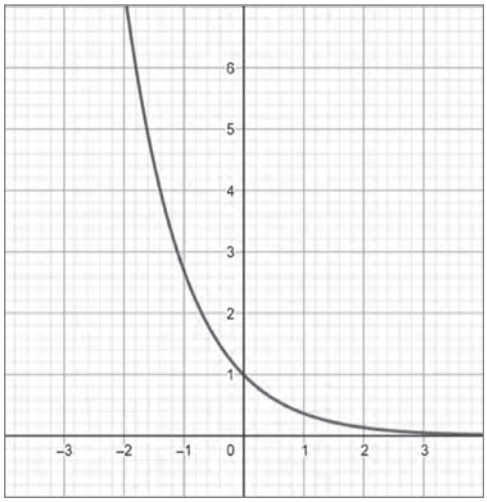
x	–3	–2	–1	0	0,5	1	1,6
$f(x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	2	4	9,18



Función: creciente.

b.

x	−3	−2	−1	0	0,5	1	1,6
$g(x)$	0,49	0,13	0,36	1	1,64	2,71	4,95



Función: decreciente.

Página 15

4.

a. $g(x)$ **c.** $p(x)$ **e.** $h(x)$
b. $m(x)$ **d.** $n(x)$ **f.** $f(x)$

5.

a. Dominio: $\mathbb{R}$, recorrido: $y \in \mathbb{R}$: $y > -1$. Interseca en el origen (0, 0).

b. Dominio: $\mathbb{R}$, recorrido: $y \in \mathbb{R}$: $y < 1$. Interseca en el origen (0, 0).

c. Dominio: $\mathbb{R}$, recorrido: $y \in \mathbb{R}$: $y > -2$. Interseca en (0,43; 0).

Página 16

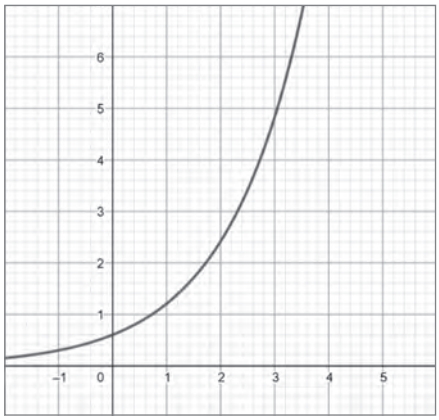
6.

a.

Tiempo (días)	1	2	3	4	5	6	7	8
Área (m^2)	1,2	2,4	4,8	9,6	19,2	38,4	76,8	153,6

b. $A(t) = 1{,}2 \cdot 2^{t-1}$

c.



d. El dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $\mathbb{R}^+$.

7. Quedan aproximadamente 0,593 mg de anestesia en la sangre después de 1 hora y media.

Página 17 Crecimiento y decrecimiento exponencial

1.

a. La constante k es aproximadamente 12,77.

b. Tiene 164022 % de riesgo de sufrir un accidente con una concentración de 0,8 g/L en la sangre.

c. Respuesta variable, por ejemplo, para una concentración 0,3 g/L de alcohol en la sangre, el riesgo es de 276,73 %.

d. e^2

Página 18

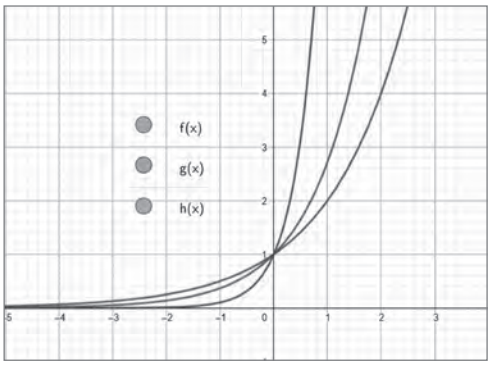
2.

a. El primer celular disminuye un 10 % su precio anual y el segundo celular disminuye un 25 % su precio anual.

b. Deben transcurrir 6,58 años en el primer celular y 2,41 años en el segundo celular.

Página 19 Antes de continuar

1.



a. El dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $\mathbb{R}^+$ para todas las funciones.

b. Todas son funciones crecientes.

c. Que la función f crece más lento que las funciones g y h.

2.

a. $a = 3$ **b.** $a = \frac{1}{4}$

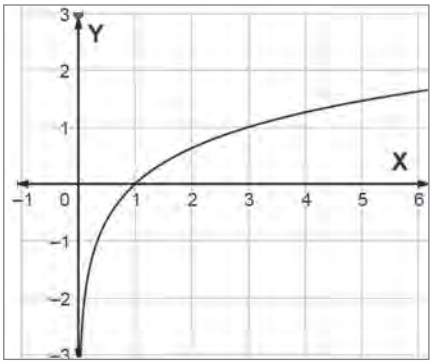
3. Al cabo de 2 horas habrá 64 000 microorganismos.

Lección 4 Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

Página 20 Función logarítmica

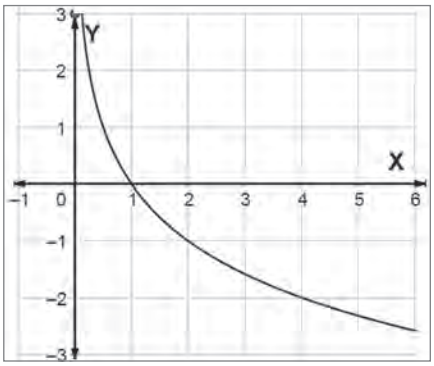
1.

a.



Función: creciente.

b.



Función: decreciente.

2.

a. El dominio es $x \in \mathbb{R}$: $x > -3$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

b. El dominio es $\mathbb{R}^+$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

3.

a. (−5, 0) y (0; 0,77).

b. (−6, 0) y (0, 1).

c. (6, 0)

d. (3, 0) y (0, −1).

Página 21

4.

a. F. Sí, puede tener valores negativos en el recorrido.

b. V.

c. F. Porque el dominio siempre es un subconjunto de $\mathbb{R}^+$

d. F. Se traslada 4 unidades hacia los negativos respecto del eje Y (hacia abajo).

5.

a. Para que f sea creciente: $a > 0$ y para que sea decreciente: $-1 < a < 0$.

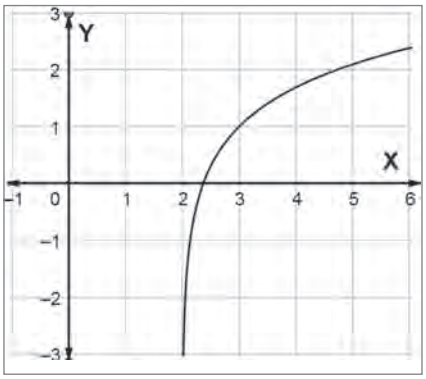
b. Para que g sea creciente: $a > -\frac{2}{3}$ y para que sea decreciente: $-\frac{2}{3} > a > -\frac{5}{6}$.

c. Para que h sea creciente: $a < -\frac{1}{3}$ y para que sea decreciente $-\frac{1}{3} < a < 0$.

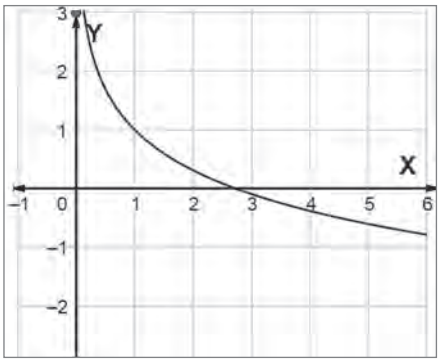
d. Para que j sea creciente: $a < \frac{5}{3}$ y para que sea decreciente $\frac{5}{3} < a < 2$.

6.

a.



b.

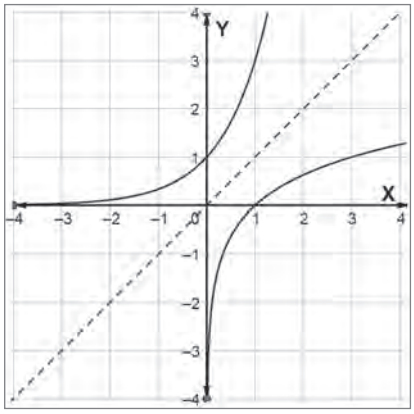


Página 23 Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

1.

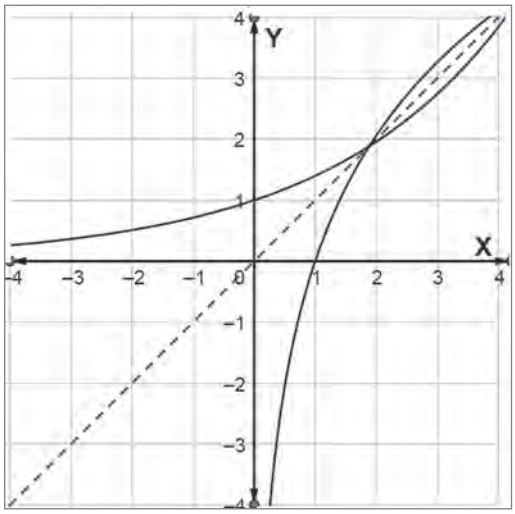
a. $f^{-1}(x) = 3^x$

x	$f^{-1}(x)$
−2	$\frac{1}{9}$
−1	$\frac{1}{3}$
−0,5	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
0	1
0,3	1,39
0,5	1,73
1	3
2	9



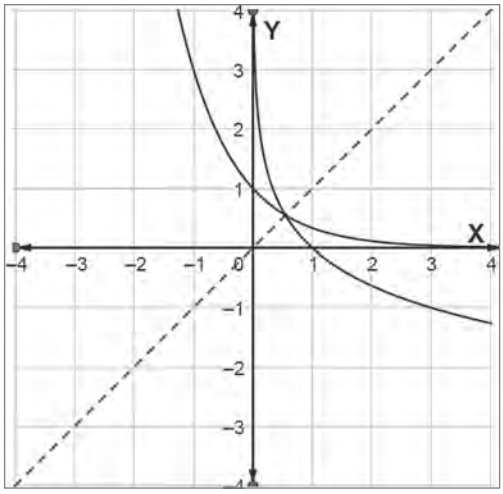
b. $g^{-1}(x) = 1{,}4^x$

x	$g^{-1}(x)$
−2	0,51
−0,5	0,84
0	1
0,3	1,1
0,6	1,22
1	1,4
1,5	1,65
2	1,96



c. $h^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$h^{-1}(x)$
−2	9
−1	3
−0,3	1,39
0	1
0,5	0,577
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



Página 24

2.

a. $f^{-1}(x) = \log_4 x$ **b.** $g^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

3.

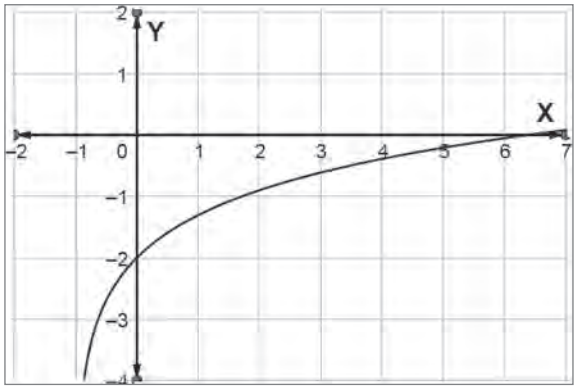
a. Primero, se puede multiplicar la expresión por −1, quedando $-pH = \log[H^+]$ y luego se utiliza la definición de logaritmo, por lo que la cantidad de iones de hidrógeno se determina $[H^+] = 10^{-pH}$.

b. $[H^+] \approx 0{,}0199$

a. La definición de logaritmo, donde $\log_b a = x$ equivale a $b^x = a$.

Página 25 Antes de continuar

1.



a. El dominio es $x \in \mathbb{R}$: $x > -1$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

b. Es una función creciente, porque a medida que x aumenta, $f(x)$ también aumenta.

2.

a. 34 479 años. **b.** 2,09 años.

c. Para encontrar la respuesta a los problemas es posible calcular la función inversa y luego reemplazar los valores de acuerdo al problema y obtener la respuesta buscada.

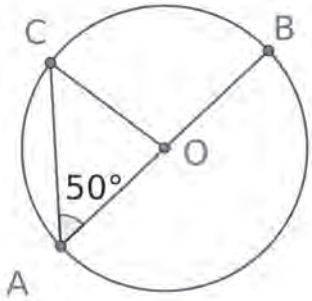
UNIDAD 3

Lección 5: Resolución de problemas con ángulos en la circunferencia

Página 26 Ángulos interiores y exteriores en la circunferencia

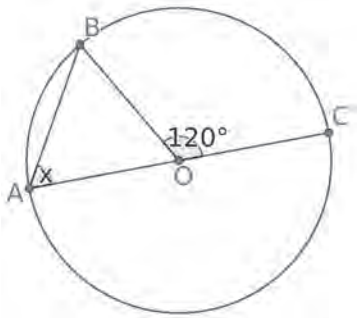
1.

a. Figura variable, por ejemplo:



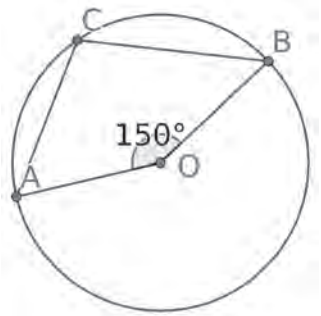
$m(\widehat{BC}) = m(\sphericalangle OAC) = x = 100°$

b. Figura variable, por ejemplo:



$m(\sphericalangle OAB) = \frac{m(\widehat{CB})}{2} = x = 60°$

c. Figura variable, por ejemplo:



$x = m(\sphericalangle ACB) = 75°$

Página 27

2.

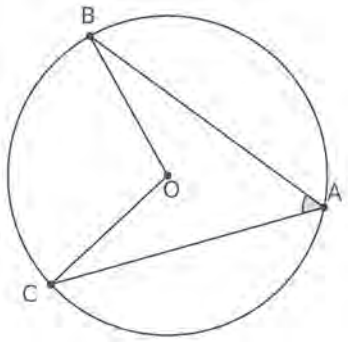
a. $\gamma = 58°$

b. Respuesta variable, por ejemplo, se calculó el valor de α y β mediante un sistema de ecuaciones y así calcular el valor de γ.

3.

a. Respuesta depende del estudiante. Se espera que utilice las herramientas de GeoGebra que permiten medir ángulos y arco, para así demostrar geométricamente lo pedido.

b. Respuesta depende del estudiante. Se espera que su construcción sea la siguiente:



c. Respuesta personal del estudiante.

d. Respuesta personal del estudiante.

Página 28 Ángulos interiores y exteriores en la circunferencia

1.

a. $\alpha = 97{,}5°$

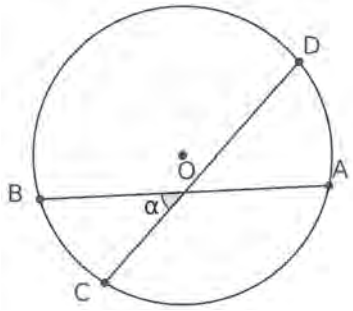
b.

$m(\widehat{AD}) = 174°$ $\qquad$ $m(\sphericalangle AED) = 138°$

2.

a. Respuesta depende del estudiante. Se espera que utilice las herramientas de GeoGebra para demostrar gráficamente lo pedido.

b. Respuesta depende del estudiante. Se espera que su construcción sea la siguiente:



Página 29

c. Respuesta personal del estudiante.

d. Respuesta variable, por ejemplo, se puede demostrar dibujando secantes y cuerdas.

Página 30 Antes de continuar

1.

a. Ángulo del centro.

b. Ángulo exterior.

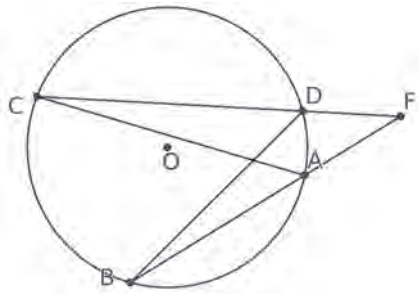
c. Ángulo inscrito.

2.

a. $\alpha = 125°$

b. $m(\sphericalangle XWZ) = 55°$; $m(\sphericalangle YXW) = 83°$

c. Respuestas variable, por ejemplo:
¿Cuál es la medida angular de $\widehat{BA}$ y de $\sphericalangle AEB$ si $m(\sphericalangle CFD) = 25°$



Respuesta: $m(\widehat{BA}) = 95°$; $m(\sphericalangle CFD) = 60°$

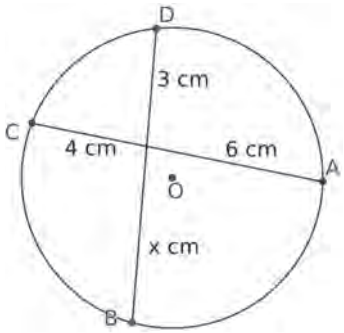
Lección 6 Resolución de problemas con segmentos en la circunferencia

Página 31 Cuerdas en la circunferencia

1. Las afirmaciones correctas son de Julián y Camila. La afirmación de Marcia es falsa, ya que los ángulos son congruentes.

2.

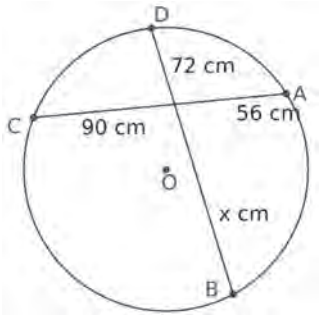
a.



$x = 8$ cm

Procedimiento: se utilizó el teorema de las cuerdas.

b.



$x = 70$ cm

Procedimiento: se utilizó el teorema de las cuerdas.

Página 32

3. $PK = 16$ cm

4.

a. Respuesta depende del estudiante.

b. Respuesta personal del estudiante.

c. Respuesta personal del estudiante.

Página 33 Secantes y tangentes en la circunferencia

1.

a. V.

b. F, ya que una recta secante a una circunferencia la corta en dos puntos.

c. V.

2.

a. $a(a + x) = p \cdot q$.

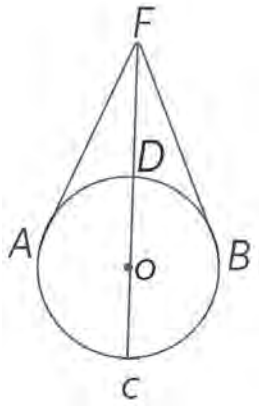
b. Se asemeja a una tangente.

c. $\overline{PD}$ sería tangente de la circunferencia.

d. $a^2 = p \cdot q$.

Página 34

3. Respuesta variable. Por ejemplo:
Se coloca una pelota bajo el foco de una lámpara (F). Los rayos de la luz pasan tangente a la pelota en los puntos A y B, como se muestra en el esquema. Además, se traza una recta imaginaria FC que pasa por el centro de la pelota.



Si la distancia entre los puntos A y F es 12 cm, y la distancia entre D y F es 8 cm, ¿cuánto mide el radio de la pelota? Respuesta: 5 cm.

Página 35 Antes de continuar

1.

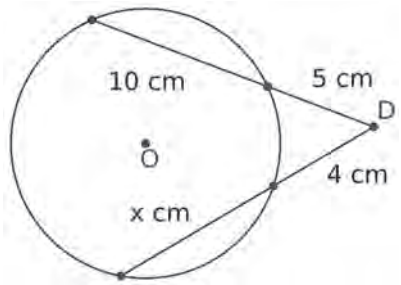
$BC = 16$ cm

2.

a. $BT = 16$ cm

b. $2BA = 4$ cm.

3. Respuestas variable, por ejemplo:
¿Cuál es el valor de x?



Respuesta: $x = 8{,}5$

UNIDAD 4

Lección 7 Números complejos

Página 36 El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

1.

a. $x = 5$. $x \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

b. $x = -5$. $x \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

c. $x = -\frac{5}{4}$. $x \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

d. $x_1 = 5i$; $x_2 = -5i$. $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$

e. $x_1 = 8$; $x_2 = -8$. $x_1 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$; $x_2 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

f. $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$

2.

a. $-1 - 3125i$

b. 16

c. $4 + 5i$

d. $-i$

Página 37

3.

z	$3 + 8i$	$-4 - 7i$	$12{,}2 - 0{,}78i$	$-5 + \frac{3}{8}i$	$\sqrt{7} - \frac{4}{9}i$	$2\sqrt{7} - 3\frac{\sqrt{5}}{2}i$
Re(z)	3	−4	12,2	−5	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$
Im(z)	8	−7	−0,78	$\frac{3}{8}$	$-\frac{4}{9}$	$-3\frac{\sqrt{5}}{2}$

4.

a. $m = \frac{1}{2}$; $n = 2$

b. $m = -\frac{5}{3}$; $n = \frac{4}{5}$

c. $m = 0$; $n = \frac{1}{17}$

d. $m = 0$; $n = \pm\sqrt{13}$

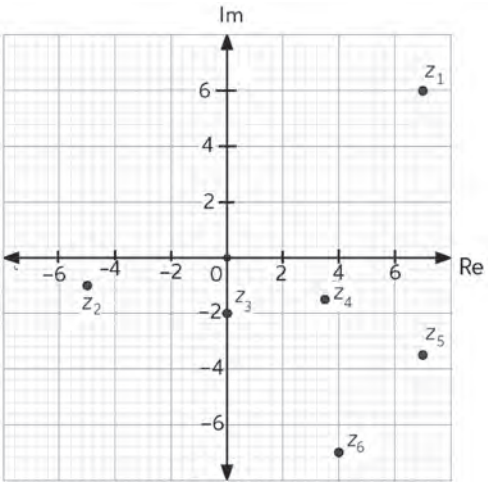
5.

a. $z = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i$

b. $z = 1 + 4i$

Página 38 Representación de números complejos

1.



2.

a. F

b. V

c. F

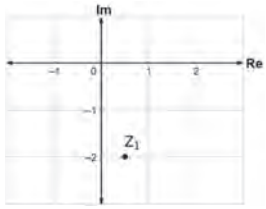
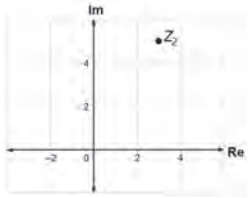
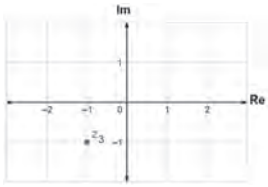
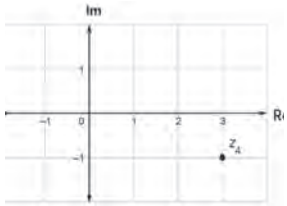
d. F

e. F

f. F

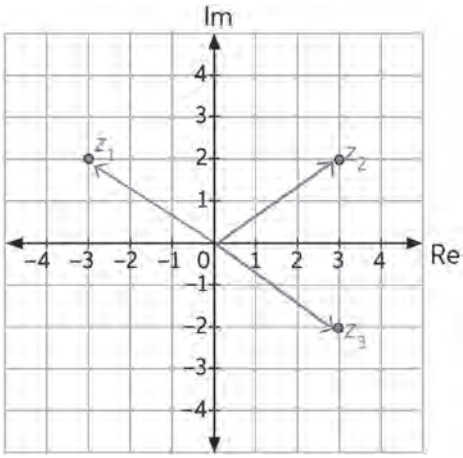
Página 39

3.

Forma Binomial	Par Ordenado	Representación Gráfica
$z_1 = \frac{1}{2} - 2i$	$z_1 = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$	
$z_2 = 3 + 5i$	$z_2 = (3, 5)$	
$z_3 = -1 - i$	$z_3 = (-1, -1)$	
$z_4 = 3 - i$	$z_4 = (3, -1)$	

4.

a.



b. $z_2 = 3 + 2i$; $z_3 = 3 - 2i$

Página 40 Módulo y conjugado de un número complejo

1.

a. $|z_1| = \sqrt{25}$

b. $|z_2| = 3\sqrt{2}$

c. $|z_3| = 1$

d. $|z_4| = \sqrt{\frac{244}{225}}$

e. $|z_5| = \sqrt{293}$

f. $|z_6| = \sqrt{\frac{1177}{4} - 56\sqrt{15}}$

g. $|z_7| = \frac{3}{2}$

h. $|z_8| = \frac{\sqrt{17}}{2}$

2.

a. $z_1 = 6 + i$

b. $z_2 = 2 + 2i$

c. $z_3 = 4 - 5i$

d. $z_4 = -5 - 3i$

e. $z_5 = 3 + i$

f. $z_6 = 1 - 2i$

Página 42 Antes de continuar

1.

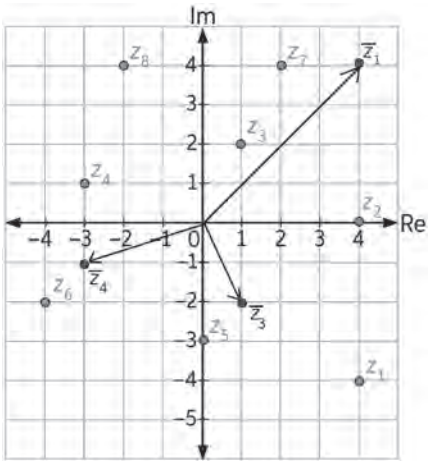
a. $x_1 = 1 + 2\sqrt{3}$; $x_2 = 1 - 2\sqrt{3}$

b. $x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{119}}{4}i$; $x_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{119}}{4}i$. $\text{Re}(x_1) = \text{Re}(x_2) = \frac{1}{4}$;

$\text{Im}(x_1) = \frac{\sqrt{119}}{4}$; $\text{Im}(x_2) = -\frac{\sqrt{119}}{4}$

2.

a.



b.

$z_1 = (4, -4)$

$z_2 = (4, 0)$

$z_3 = (1, 2)$

$z_4 = (-3, 1)$

$z_5 = -3i$

$z_6 = -4 - 2i$

$z_7 = 2 + 4i$

$z_8 = -2 + 4i$

c.

$|z_5| = 3$

$|z_6| = 2\sqrt{5}$

$|z_7| = 2\sqrt{5}$

d.

- F
- F
- F

Lección 8 Resolución de problemas usando la operatoria de números complejos

Página 43 Adición y sustracción de números complejos

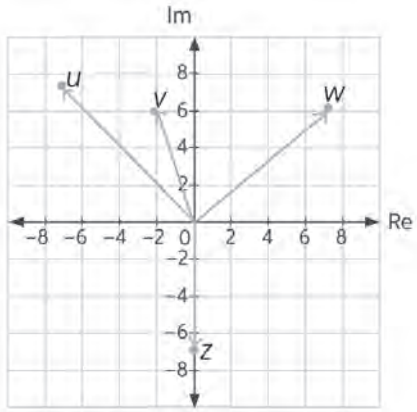
1.

a. $z = (0, -7)$

b. $w = (7, 6)$

c. $u = (-7, 7)$

d. $v = (-2, 6)$



2.

a. $a = \frac{5}{2}$; $b = \frac{1}{9}$

b. $a = -\frac{5}{2}$; $b = -\frac{3}{4}$

c. $a = 0$; $b = \frac{2}{3}$

d. $a = -1$; $b = 0$

Página 44

3.

a. $7 + 27i \Rightarrow (7, 27)$

b. $-11 + 7i \Rightarrow (-11; 7)$

c. $-22 - 2i \Rightarrow (-22, -2)$

d. $14{,}3 + 16{,}5i \Rightarrow (14{,}3; 16{,}5)$

e. $-54 + 35i \Rightarrow (-54, 35)$

f. $1 - 9{,}787i \Rightarrow (1; -9{,}787)$

4.

a. $12 + 7i$

b. Respuesta variable, por ejemplo $z = 5 + 8i$.

c. $\frac{8}{5}$

Página 45 Multiplicación de números complejos

1.

a. 7,2 +14,4i

b. 11,4 – 8,1i

c. 42,12 – 59,28i

d. 93,4416 – 145,152i

2.

a. 20 – 4i

b. –0,9 + 52,5i

c. 25,5 + 38,2i

d. –42,67 – 15,69i

3.

a. –70 + 130i

b. 112,25 + 221i

c. –52 + 4i

d. 2719 – 53928i

Página 46

4.

a. $k = 5$

b. $k = -2$

c. $k = 6$

d. $k = -3$

e. $k = 0{,}5$

f. $k = -0{,}75$

5. $-z = -186 + 98i$

Página 47 División de números complejos

1.

a. $\frac{6}{13} - \frac{9}{13}i$

b. $-\frac{1}{4} + \frac{7}{12}i$

c. $\frac{3{,}96}{44{,}32} + \frac{17{,}24}{44{,}36}i$

d. $-\frac{59{,}2}{72{,}4} + \frac{2{,}6}{72{,}4}i$

e. $-\frac{65}{58} - \frac{3}{58}i$

f. $\frac{102}{61} + \frac{37}{61}i$

g. $\frac{23{,}74}{24{,}41} - \frac{10{,}86}{24{,}41}i$

h. $\frac{67{,}68}{52} - \frac{22{,}24}{52}i$

Página 48

2.

a. $\frac{7}{58} - \frac{3}{58}i$

b. $\frac{3}{20} + \frac{1}{20}i$

c. $\frac{1400}{19721} + \frac{110}{19721}i$

d. $\frac{10}{10001} + \frac{1000}{10001}i$

3.

a. El error es que no multiplicó el dividendo por el conjugado del divisor.

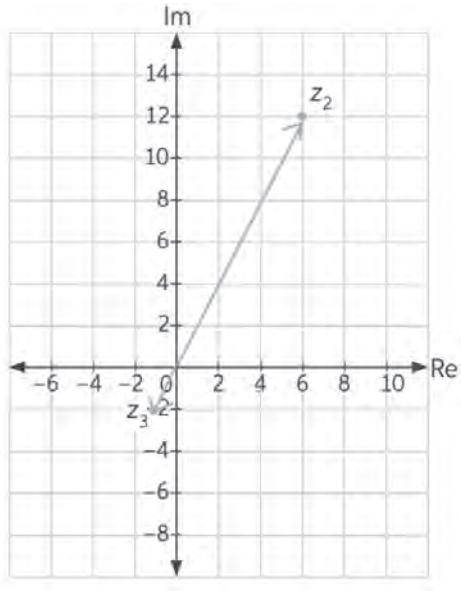
b. $-\frac{13}{25} + \frac{41}{25}i$

Página 49 Antes de continuar

1.

a. $z_2 = 6 + 12i$

b. $z_3 = -1 - 2i$



2.

Número	–z	z^{-1}
(0, 3)	–3i	$\frac{1}{3}$i
$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$	$\frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5}\sqrt{2}\ i$

3. Matilde tiene razón. Ejemplo: Se sabe que $z = a + bi$, entonces:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Luego:

$$\frac{1}{z} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)^2} = \frac{1}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

Así, para lo que dice Matilde se obtiene:

$$\frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} = \left|\frac{1}{z}\right|$$

Página 7: Analizando el desempeño futbolístico

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Elección de equipo y selección de criterios de estudio	Eligen un equipo de fútbol, y evalúan todos los criterios para el desarrollo de la actividad.	Eligen un equipo de fútbol, y consideran casi todos los criterios para el desarrollo.	Eligen un equipo de fútbol, y consideran pocos criterios para el desarrollo.
Recopilación de la información	Recopilan la información de una fuente confiable y de forma responsable con el objetivo de cumplir con todos los requerimientos.	Recopilan la información de una fuente confiable con el objetivo de cumplir con algunos requerimientos de la actividad.	Recopilan la información de una fuente poco confiable que no ayuda a cumplir con los requerimientos de la actividad.
Retroalimentación del trabajo	Los estudiantes comparten sus resultados de forma clara, completa y consistente con lo propuesto en la actividad. Responden a las tres preguntas propuestas en la actividad.	Los estudiantes comparten sus resultados de forma parcial respecto a lo propuesto en la actividad. Responden a dos de las tres preguntas propuestas.	Los estudiantes no comparten sus resultados de la actividad. Responden a una de las tres preguntas propuestas en la actividad.
Conclusiones	Presentan un completo análisis, interpretación y relación del uso de las medidas de dispersión en la actividad propuesta.	Presentan de manera breve el análisis, interpretación y relación del uso de las medidas de dispersión en la actividad propuesta.	Presentan escasamente un análisis o interpretación del uso de las medidas de dispersión en la actividad propuesta.

Página 18: Método del Carbono 14 (C14)

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Búsqueda de información	Utilizan diversas fuentes de investigación confiable para dar respuesta a las interrogantes.	Utilizan algunas fuentes de investigación para dar respuesta a las interrogantes.	Utilizan pocas fuentes de investigación para dar respuesta a las interrogantes.
Respuesta a interrogantes	Responden correctamente las tres interrogantes.	Responden correctamente a dos interrogantes.	Responden correctamente una interrogante.
Descripción del modelo exponencial	Describen con buenos argumentos el modelo, como una función creciente.	Describen el modelo como una función creciente, con escasos argumentos.	Describen incorrectamente el modelo de la función que representa la situación.
Conclusiones	Concluyen y analizan correctamente sobre los resultados obtenidos.	Emiten correctamente algunas conclusiones sobre los resultados obtenidos.	No emiten conclusiones sobre los resultados obtenidos.

Página 22: Relación entre el área corporal de una persona, su masa y su estatura

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Recopilación de datos y registro	Recopilan toda la información y organizan los datos en una tabla.	Recopilan toda la información pero no organizan los datos en una tabla.	No recopilan toda la información solicitada.
Aplicación del modelo definido	Aplican el modelo descrito, y determinan el área de la superficie de cada uno de los encuestados.	Aplican el modelo descrito, con algunos errores de cálculos en el área de la superficie de los encuestados.	Aplican incorrectamente el modelo descrito.
Estrategia de comprobación	Plantean correcta y efectivamente la estrategia de verificar el modelo matemático.	Plantean la estrategia para verificar el modelo matemático, pero con algunos errores.	No plantean la estrategia de verificación del modelo matemático.
Conclusiones	Realizan un completo análisis e interpretación del comportamiento del modelo matemático.	Realizan un breve análisis e interpretación del comportamiento del modelo matemático.	Realizan un análisis e interpretación del comportamiento del modelo matemático.

Página 29: Ángulos interiores y exteriores en una circunferencia a través de un cuento

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Resumen	Los estudiantes realizan un resumen completo de los contenidos, incorporando sus diferentes habilidades e intereses (mapas mentales, por ejemplo). Incorporan en el resumen la opinión de todos los integrantes del grupo y consiguen ponerse de acuerdo para ello.	Los estudiantes realizan un resumen completo de los contenidos, sin incorporar diferentes habilidades e intereses (mapas mentales, por ejemplo). Incorporan parcialmente la opinión de todos los integrantes del grupo.	Los estudiantes realizan un resumen incompleto de los contenidos, sin incorporar diferentes habilidades e intereses (mapas mentales, por ejemplo). No incorporan la opinión de todos los integrantes del grupo.
Recursos utilizados	Los estudiantes escriben el cuento considerando las habilidades creativas de todo el grupo, utilizando materiales que incorporan las ideas de todos.	Los estudiantes escriben el cuento considerando las habilidades creativas parcialmente del grupo, utilizando materiales que incorporan algunas ideas de ellos.	Los estudiantes escriben el cuento incompleto sin considerar las habilidades creativas del grupo, utilizan materiales que no incorporan ideas.
Distribución del trabajo	Los estudiantes distribuyen su trabajo considerando sus habilidades y capacidades de manera que el trabajo se realiza de manera equitativa.	Los estudiantes distribuyen su trabajo parcialmente considerando sus habilidades y capacidades. El trabajo se realiza de manera parcialmente equitativa.	Los estudiantes no distribuyen su trabajo considerando sus habilidades y capacidades.
Retroalimentación del trabajo	Los estudiantes comparten sus resultados de forma clara, completa y consistente con lo propuesto en la actividad. Responden a todos los requerimientos de la actividad.	Los estudiantes comparten sus resultados de forma parcial respecto a lo propuesto en la actividad. Responden a parcialmente a los requerimientos de la actividad.	Los estudiantes no comparten sus resultados de la actividad. No responden a los requerimientos de la actividad.

Página 33: Mural de secantes y tangentes en la circunferencia

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Situaciones cotidianas	Mencionan 3 ejemplos de situaciones cotidianas que se asocian con secantes y tangentes en una circunferencia.	Mencionan 2 ejemplos de situaciones cotidianas que se asocian con secantes y tangentes en una circunferencia.	Mencionan 1 ejemplo donde se puede conectar situaciones cotidianas con secantes y tangentes en una circunferencia.
Construcción del lienzo	Cumplen con la confección del lienzo, con materiales apropiados, y el tiempo asignado para desarrollar la actividad.	Cumplen con la confección del lienzo, con materiales apropiados, pero excediendo el tiempo asignado para terminar la actividad.	Confección incompleta del lienzo, no se termina en el tiempo asignado.
Contenido del lienzo	Explicación es detallada y clara, muestra completo entendimiento de los conceptos y su aplicación. El lienzo proyecta información completa.	Explicación breve de los contenidos. El lienzo proyecta información completa.	Explicación con ausencia de elementos importantes. El lienzo proyecta una parte de la información.
Conclusiones	Reflexión crítica sobre la aplicación e importancia de las matemáticas en situaciones cotidianas.	Reflexión crítica breve sobre la aplicación e importancia de las matemáticas en situaciones cotidianas.	Carece de reflexión sobre la aplicación e importancia de las matemáticas en situaciones cotidianas.

Página 41: Juego de tablero con números complejos

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Construcción del tablero	Cumplen con la confección del tablero, con materiales apropiados, y el tiempo asignado para desarrollar la actividad.	Cumplen con la confección del tablero, con materiales apropiados, pero excediendo el tiempo asignado para terminar la actividad.	Confección incompleta del tablero, no se termina en el tiempo asignado.
Estrategias y reglas del juego	Proponen la cantidad suficiente de estrategias y reglas para el juego. Estas son coherentes al contenido, en donde se realizan cálculos con números complejos, ya sea determinar módulo y/o conjugado, y proyectar dichos resultados en el tablero simulando un plano de Argand.	Proponen el mínimo de estrategias y reglas para desarrollar el juego. Estas son coherentes al contenido, donde se realizan cálculos con números complejos, ya sea como determinar módulo y/o conjugado, y proyectar dichos resultados en el tablero simulando un plano de Argand.	Proponen escasas estrategias y reglas para desarrollar el juego.
Práctica del juego	Ponen en práctica lo aprendido, usando las estrategias y reglas propuestas, llegando a un ganador finalmente sin dificultad.	Ponen en práctica lo aprendido, mostrando dificultad en el cálculo que deben realizar a partir de lo que les entregan las fichas, para proyectar en el plano de Argand.	No aplican los conceptos referentes a los números complejos, durante el desarrollo del juego.
Discusión de resultados	Reflexionan críticamente sobre el juego y la relación con los números complejos, muestran donde notaron la mayor dificultad para desarrollar la actividad, y proponen nuevas reglas y estrategias para aumentar su complejidad.	Reflexionan sobre el juego y la relación con los números complejos, pero no proponen nuevas reglas para aumentar su complejidad.	No reflexionan sobre el juego y la relación con los números complejos.

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

ISBN 978-956-363-724-3

9 789563 637243