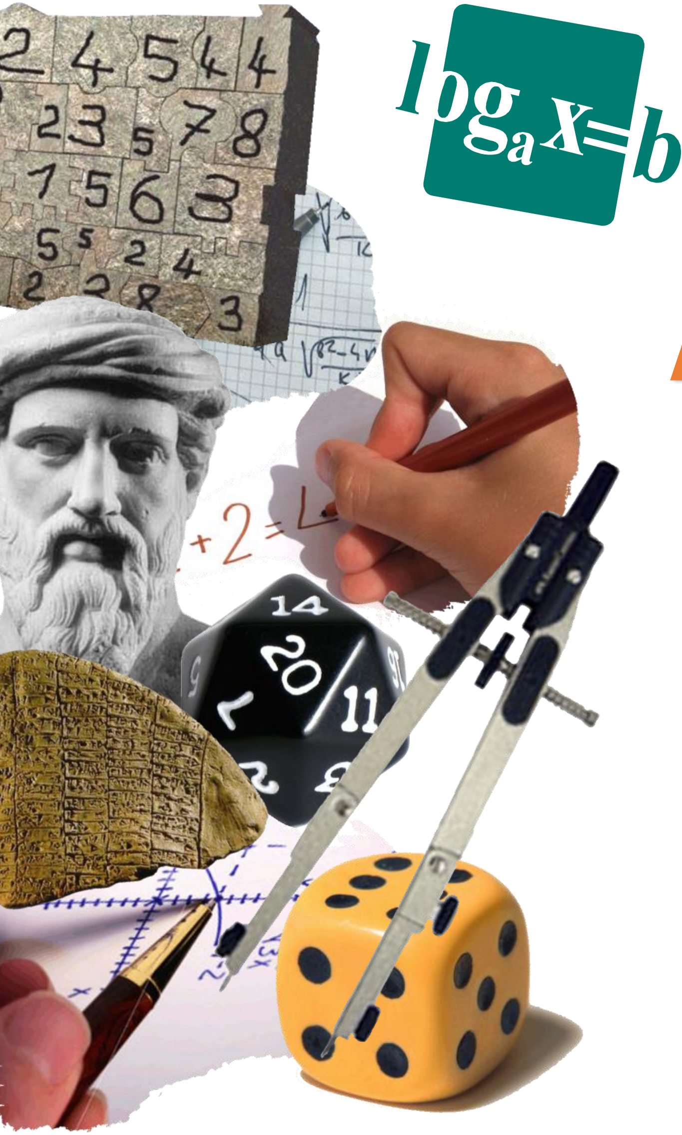


Función Cuadrática y Ecuación de Segundo Grado

1. Función Cuadrática

Es de la forma:

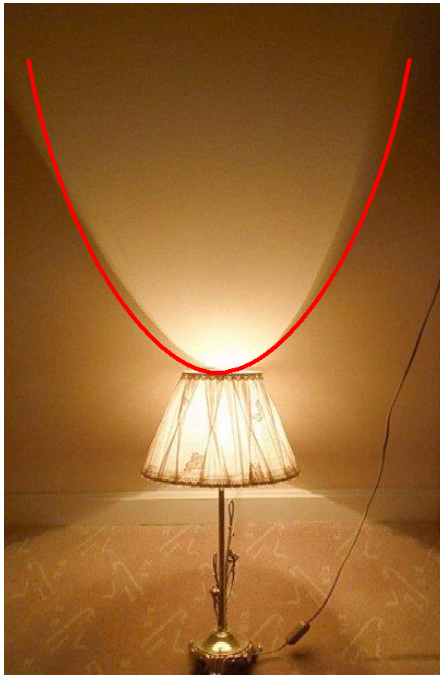
$f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$; $a,b,c \in IR$

y su gráfica es una parábola.

Ejemplos:

a) Si $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow a = 2,\ b = 3$ y $c = 1$

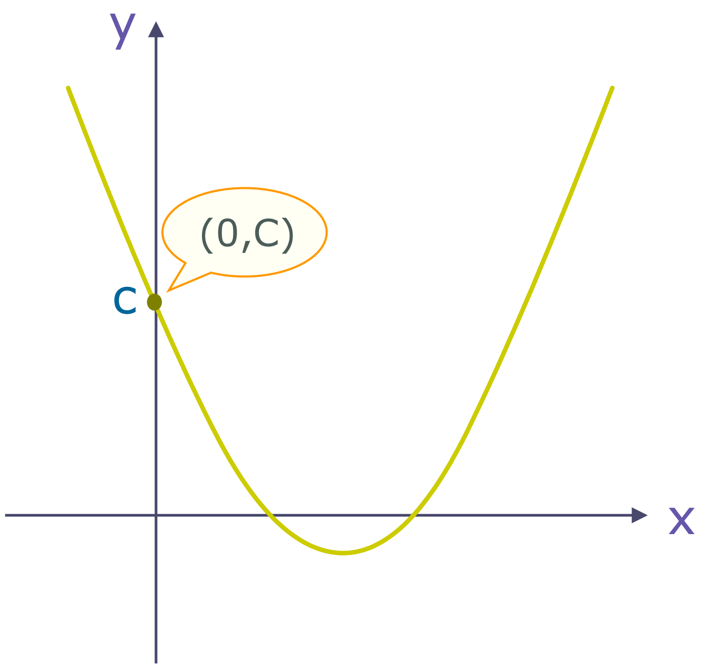
b) Si $f(x) = 4x^2 - 5x - 2 \Rightarrow a = 4,\ b = -5$ y $c = -2$



1.1. Intersección con eje Y

En la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$,

el coeficiente **c** indica la ordenada del punto donde la parábola intersecta al eje Y.

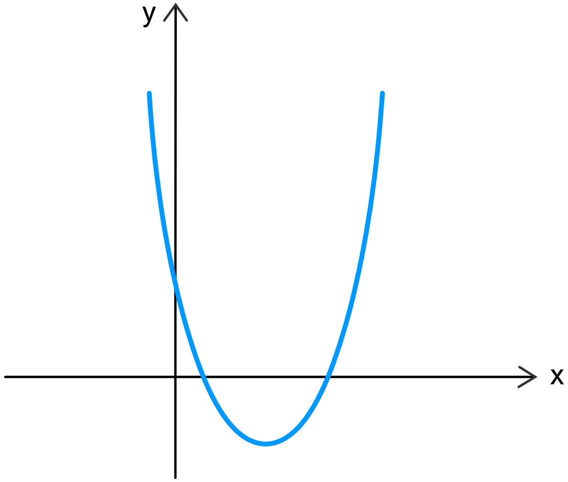


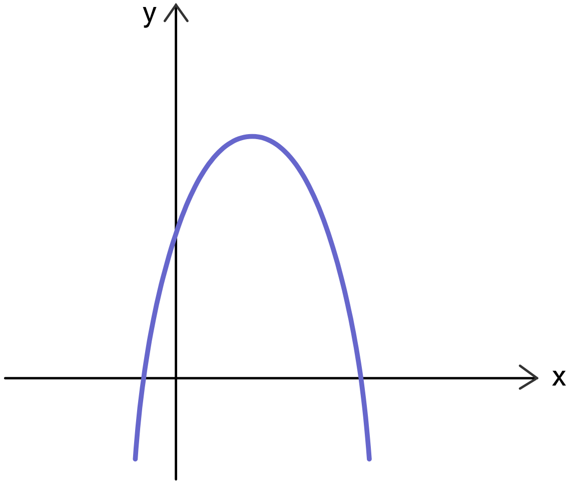
1.2. Concavidad

En la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$,

el coeficiente **a** indica si la parábola es

cóncava hacia arriba o hacia abajo.





Si $a > 0$,
es cóncava hacia arriba

Si $a < 0$,
es cóncava hacia abajo

1.3 Orientación:

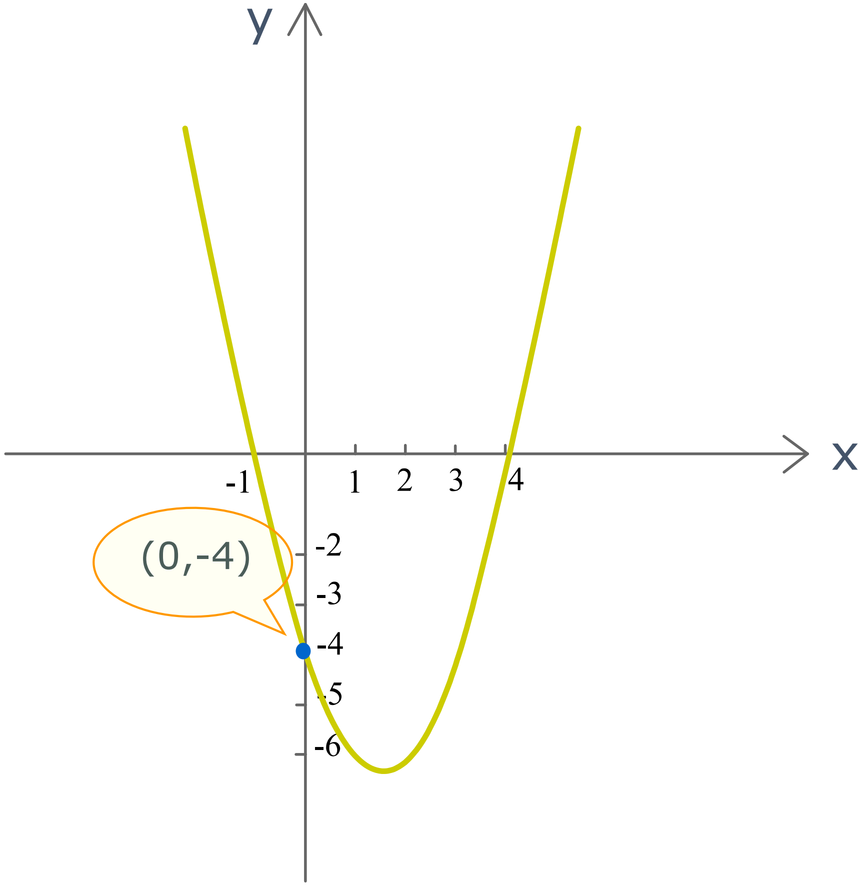
El valor de b en la función: $f(x) = ax^2 + bx + c$ permite saber el movimiento horizontal de la parábola (← 0 →)

a \ b	+	-
+	←	→
-	→	←

Ejemplo:

En la función $f(x) = x^2 - 3x - 4$, $a = 1$; $b=-3$ y $c = - 4$.

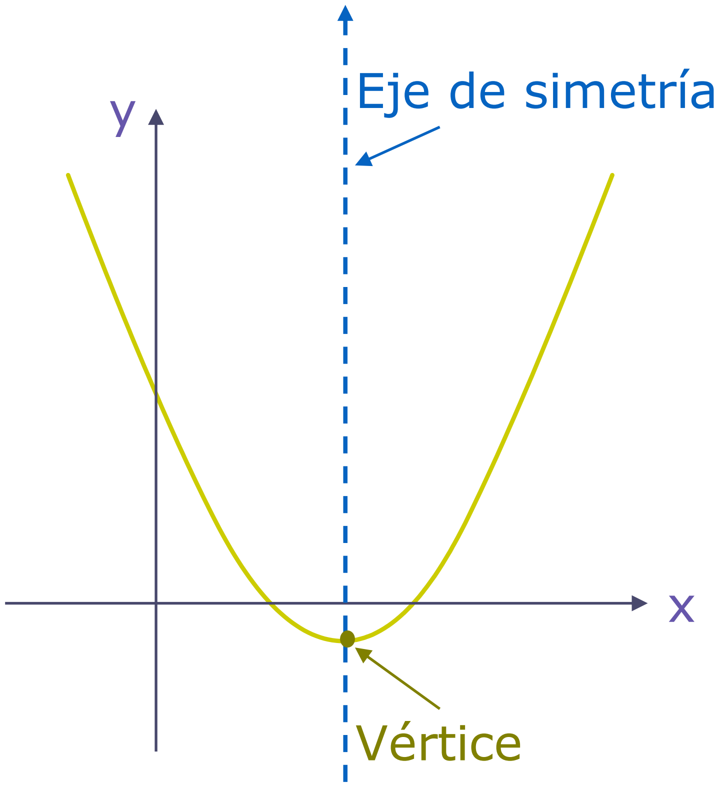
Luego, la parábola intersecta al eje Y en el punto (0,- 4), es cóncava hacia arriba y está orientada hacia la derecha respecto al eje Y.



1.4. Eje de simetría y vértice

El vértice de una parábola es el punto más alto o más bajo de la curva, según sea su concavidad.

El eje de simetría es la recta que pasa por el vértice de la parábola, y es paralela al eje Y.



Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces:

a) Su eje de simetría es:

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

b) Su vértice es:

$$\boxed{V = \left(\frac{-b}{2a} \, , \; f\left(\frac{-b}{2a} \right) \right)}$$

$$\boxed{V = \left(\frac{-b}{2a} \, , \; \frac{4ac - b^2}{4a} \right)}$$

Ejemplo:

En la función $f(x) = x^2 + 2x - 8$, $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$, entonces:

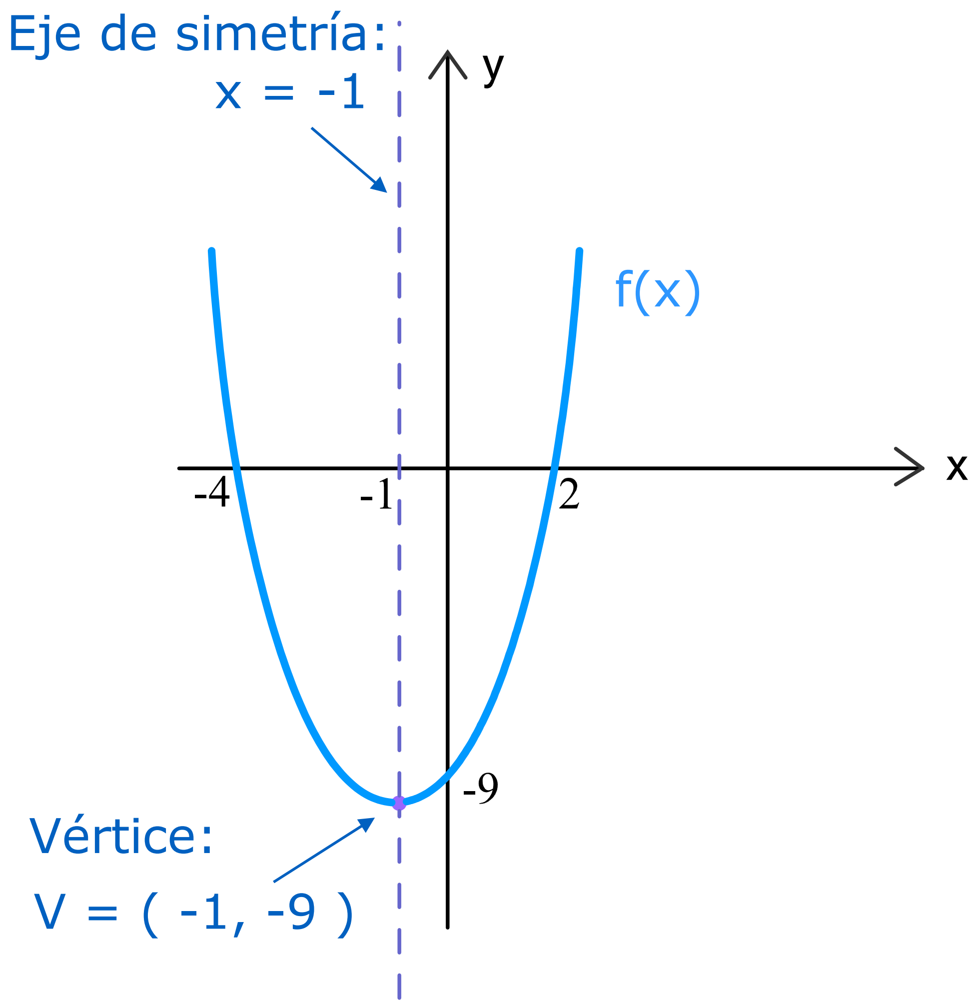
a) Su eje de simetría es:

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2}{2 \cdot 1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

b) Su vértice es:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a} \right) \right) \Rightarrow V = (-1, f(-1))$$

$$\Rightarrow \boxed{V = (-1, -9)}$$


Eje de simetría:
x = -1
y
f(x)
x
-4
-1
2
-9
Vértice:
V = (-1, -9)

Si la parábola es abierta hacia ***arriba***, el vértice es un ***mínimo*** y si la parábola es abierta hacia ***abajo***, el vértice es un ***máximo***.

1.5 Traslación de una Función Cuadrática:

Si $y=ax^2$ *una función cuadrática cualquiera.*

i) $y=a(x-h)^2$ significa que la función se movió a la derecha, h unidades

ii) $y=a(x+h)^2$ significa que la función se movió a la izquierda, h unidades.

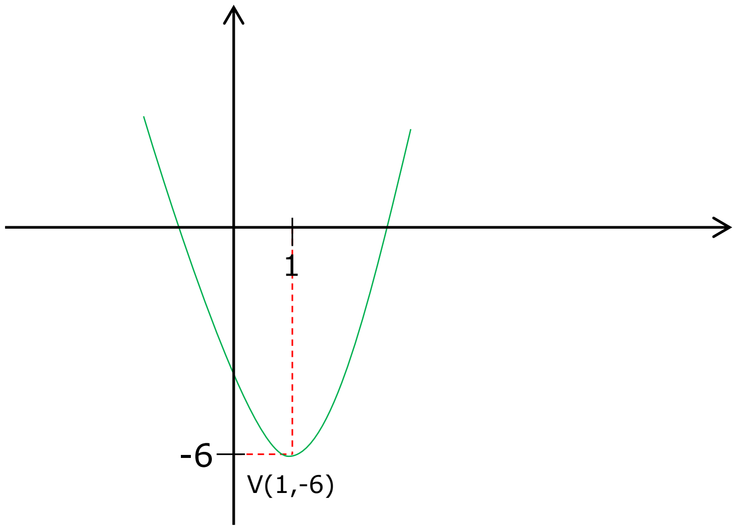
iii) $y=a(x-h)^2+k$ significa que la función se movió a la derecha y k unidades hacia arriba

iv) $y=a(x+h)^2-k$ significa que la función se movió a la izquierda y k unidades hacia abajo.

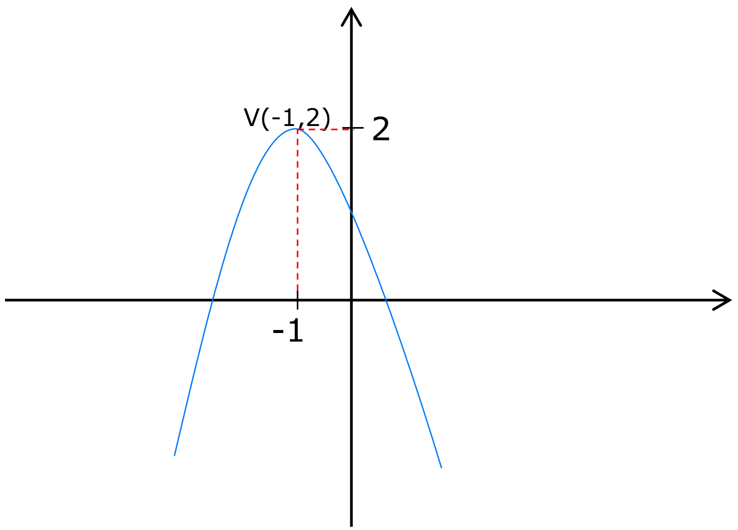
Obs: h y k corresponden a las coordenadas del vértice V(h,k)

Por ejemplo: ¿Cuál es el gráfico de la función:

a) $f(x) = (x - 1)^2 - 6$



b) $f(x) = -(x + 1)^2 + 2$

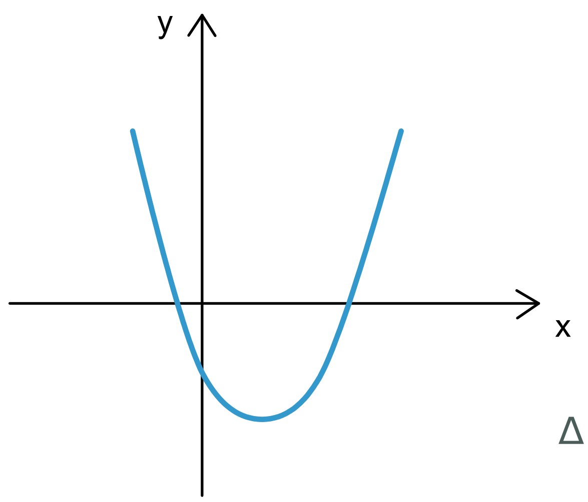


1.6. Discriminante

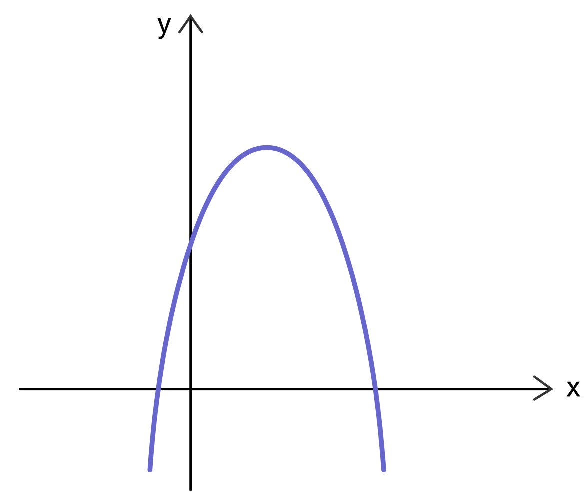
El discriminante se define como:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

a) Si el **discriminante es positivo**, entonces la parábola **intersecta en dos puntos al eje X.**

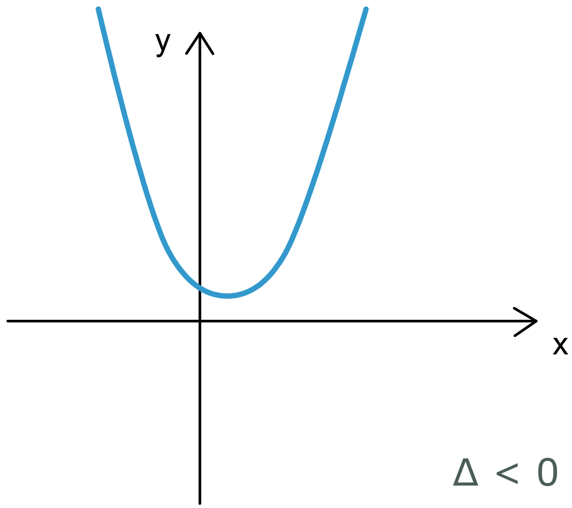


$\Delta > 0$



Propiedad Intelectual Cpech RDA: 186411

b) Si el **discriminante es negativo**, entonces la parábola **NO intersecta al eje X**.

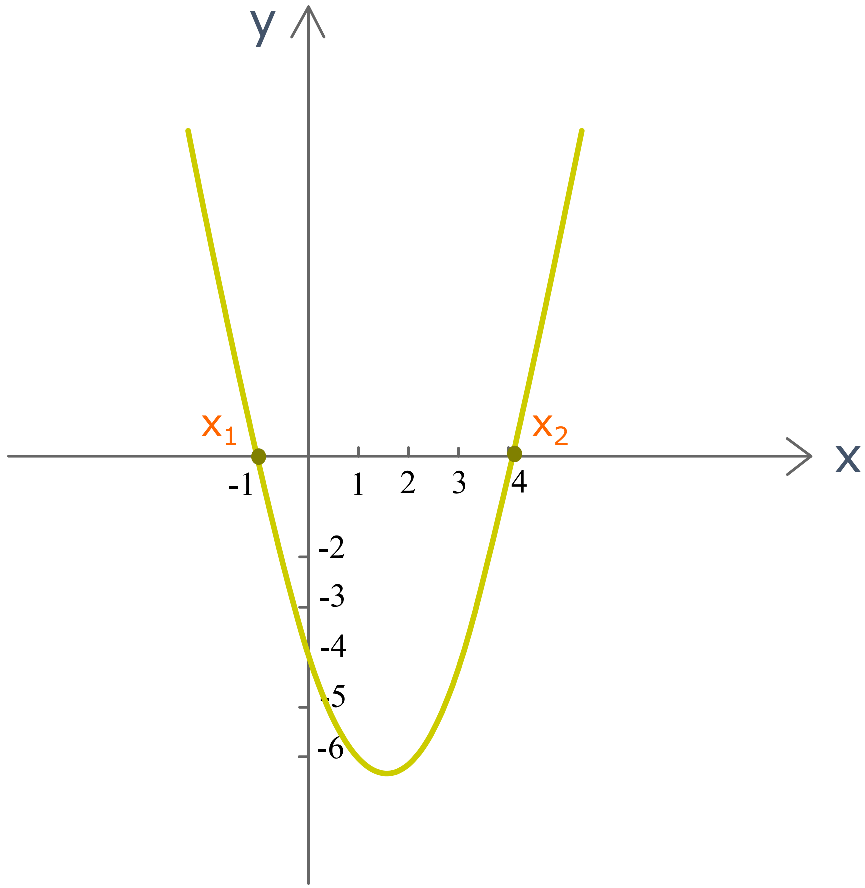


$\Delta < 0$

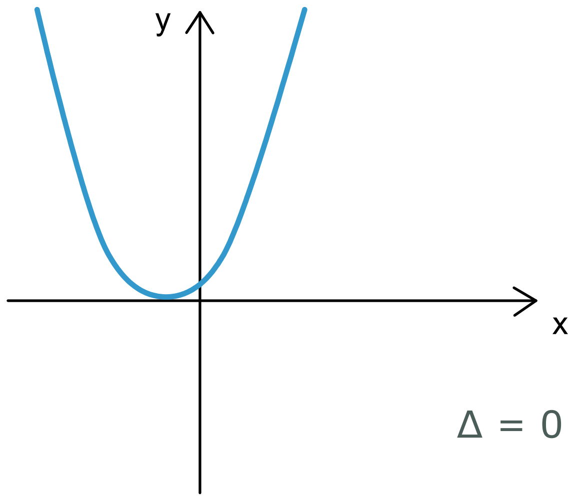
Ejemplo:

En la función, $f(x)=x^2 - 3x - 4 = 0$ la ecuación asociada es : $x^2 - 3x - 4 = 0$, y tiene raíces -1 y 4.

Luego, la parábola intersepta al eje X en esos puntos.



c) Si el **discriminante es igual a cero**, entonces la parábola **intersecta en un solo punto al eje X**, es tangente a él.



$\Delta = 0$

1.7 DOMINIO Y RECORRIDO:

- Dominio: El dominio de cualquier función cuadrática siempre será IR.

Dom f = IR

- Recorrido:

Dependerá de la concavidad de la parábola:

✓ Sí es cóncava hacia arriba, (a>0) es:

Rec f=$\left[\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a},+\infty\right[$ ó Rec f=IR$\geq\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$

✓ Sí es cóncava hacia abajo, (a<0) es:

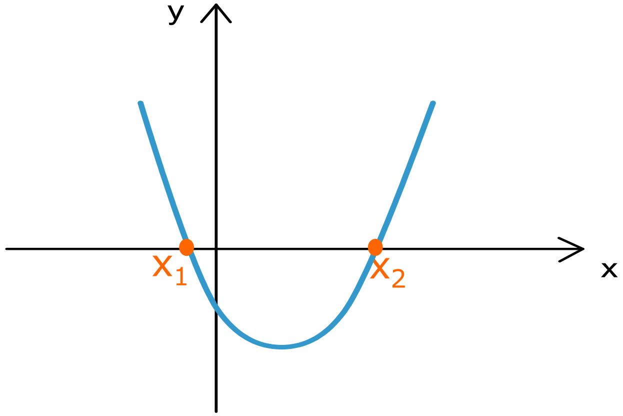
Rec f=$\left]-\infty,\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right]$ ó Rec f=IR$\leq\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$

1.8 La intercepción con eje X y la Ecuación Cuadrática

Cuando se quiere hacer interceptar la función cuadrática con el eje X, debemos hacer f(x)=0. Por lo tanto la función se transforma en una ecuación cuadrática o de segundo grado que es de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0}$$

Y como toda ecuación de segundo grado tiene 2 soluciones o raíces, significa que la función posee dos "ceros". Si éstas son reales, corresponden a los puntos de intersección de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ con el eje X.



Ec. Cuadrática
o
de Segundo Grado.

DEFINICIÓN

Una ecuación cuadrática de variable "x" es aquella que puede escribirse en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde: a, b y c son números reales ($a \neq 0$).

***Ejemplo*: $2x^2 - 7x + 3 = 0$**

($a = 2$, $b = -7$, $c = 3$)

Tipos de Ecuaciones de 2° Grado y sus raíces(sol.):

Tipos de Ecuaciones cuadráticas:

- **Incompleta Pura**: $\boxed{ax^2 + c = 0}$,con b=0

Sus soluciones son:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación $4x^2 - 36 = 0$

$4x^2 = 36 \quad /:4$

$x^2 = 36/4$

$x^2 = 9 \quad /\sqrt{}$

$x = \pm 3$

$\boxed{x_1 = 3}$

$\boxed{x_2 = -3}$

-**Incompleta Binomia:** $\boxed{ax^2 + bx = 0}$,con c=0

Sus soluciones son: $\boxed{x_1 = 0}$

$\boxed{x_2 = -b/a}$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación $6x^2 - 15x = 0$

Resolver:

MÉTODO DE FACTORIZACIÓN

Ejemplo : Resolver $x^2 - 7x + 12 = 0$

Resolución: $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$(x \pm ?)(x \pm ?) = 0$$

Entonces: $(x - 3)(x - 4) = 0$

Luego: $x - 3 = 0$ **ó** $x - 4 = 0$

De donde: $x = 3$ **ó** $x = 4$

Por tanto: $C.S. = \{3; 4\}$

Ejemplo: **Resolver** $(3x - 4)(x + 1) = -2$

Resolución:

Debemos expresar la ecuación en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para ello efectuamos las operaciones de multiplicación.

$$(3x - 4)(x + 1) = -2$$

Obtenemos: $3x^2 + 3x - 4x - 4 = -2$

Reduciendo: $3x^2 - x - 2 = 0$

Factorizando:

$$\begin{array}{ll} 3x & 2 \\ x & -1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x \\ -3x \end{array}\right\} = -x$$

Entonces: $(3x + 2)(x - 1) = 0$

Luego: $3x + 2 = 0$ ó $x - 1 = 0$

De donde: $x = -2/3$ ó $x = 1$

C.S. = { −2/3; 1 }

-Completa general: $ax^2 + bx + c = 0$

Fórmula para determinar sus soluciones (raíces) es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

Determinar las raíces de la ecuación: $x^2 - 3x - 4 = 0$

Se obtiene el valor de: a=1, b=-3 y c=-4 y se reemplazan en la fórmula dada:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1(-4)}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{8}{2} \qquad\qquad x = \frac{-2}{2}$$

$$\boxed{x_1 = 4} \qquad\qquad \boxed{x_2 = -1}$$

También se puede obtener las raíces de la ecuación factorizando como producto de binomios:

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x - 4) = 0 \qquad ó \qquad (x + 1) = 0$$

$$\boxed{x_1 = 4} \qquad\qquad \boxed{x_2 = -1}$$

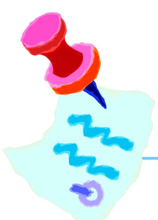
2.2. Propiedades de las raíces

Si x_1 y x_2 son las raíces de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, entonces:

1) $$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

2) $$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

3) $$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$



Dadas las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado, se puede determinar la ecuación asociada a ellas.

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

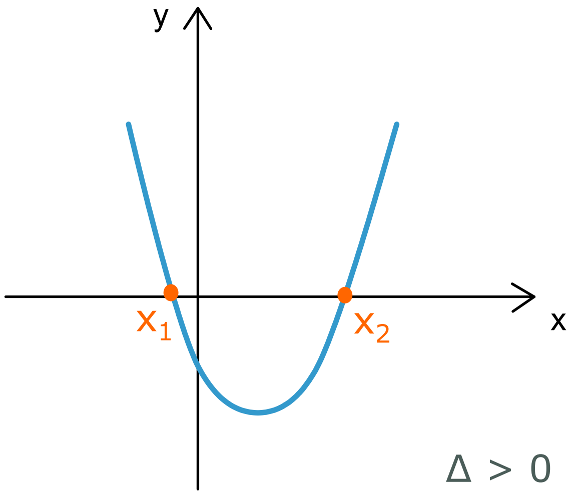
2.3. Discriminante

En una ecuación de segundo grado, el discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

permite conocer la naturaleza de las raíces.

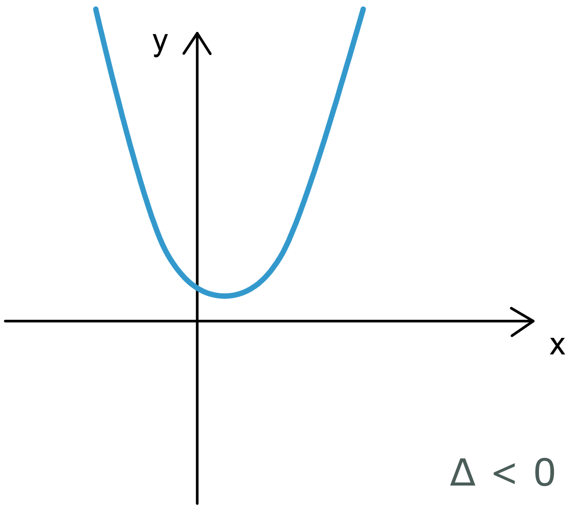
a) Si el **discriminante es positivo**, entonces la ecuación cuadrática tiene **dos** soluciones **reales x_1, x_2 y distintas**.



La parábola intersecta en dos puntos al eje X.

x_1, x_2 son reales y $x_1 \neq x_2$

b) Si el **discriminante es negativo**, entonces la ecuación cuadrática **no** tiene solución real, es decir, sus raíces son imaginarias.



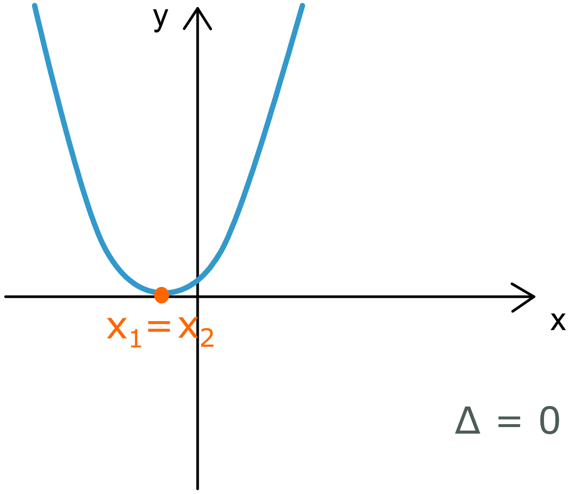
$\Delta < 0$

La parábola NO intersecta al eje X.

x_1, x_2 son complejos y conjugados

$$x_1 = \overline{x_2}$$

c) Si el **discriminante es igual a cero**, entonces la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales e iguales.



$\Delta = 0$

La parábola intersecta en un solo punto al eje X.

x_1, x_2 son reales y $x_1 = x_2$

APLICACIONES

Equilibrio de mercado

Cuando el precio de un producto es p dólares por unidad, suponga que un fabricante suministrará $3p^2 - 4p$ unidades del producto al mercado y que los consumidores demandarán $24 - p^2$ unidades. Determine el valor de p para que el mercado esté en equilibrio (oferta = demanda)

Oferta = $3p^2 - 4p$

Demanda = $24 - p^2$

$$3p^2 - 4p = 24 - p^2$$

Luego: $4p^2 - 4p - 24 = 0$

Simplificando: $p^2 - p - 6 = 0$

Factorizando: $(p - 3)(p + 2) = 0$

Luego: $p = 3$ ó $p = -2$

Respuesta: Cuando el precio del producto sea de \$3, el mercado estará en equilibrio (*no se toma en cuenta el otro valor pues no podemos hablar de precio negativo***)**

APLICACIONES

Negocios

Una compañía determina que si se produce y vende *q* unidades de un producto, el ingreso total por las ventas será de $100\sqrt{q}$. Si el costo variable por unidad es de \$ 2 y el costo fijo de \$ 1200, determine los valores de *q* para los que:

Ingreso total por ventas = costo variable + costo fijo (Esto es, utilidad cero)

Resolución

Datos: $\text{Ingresototal} = 100\sqrt{q}$

Costo variable = $2q$

Costo fijo = 1200

$$100\sqrt{q} = 2q + 1200$$

Elevando al cuadrado:

$$10000q = 4q^2 + 4800q + 1440000$$

Reduciendo: $q^2 - 1300q + 360000 = 0$

Factorizando: $(q - 900)(q - 400) = 0$

Luego: $q = 900$ ó $q = 400$

Respuesta: Si se producen y venden 400 ó 900 unidades, la utilidad será cero