Liceo Polivalente JHJ
Comuna de El Carmen
Depto. De Matemática

GUÍA DE TRABAJO MATEMÁTICA SEGUNDO AÑO MEDIO

CONTENIDOS: ***TEORÍA COMBINATORIA o TÉCNICAS DE CONTEO***

OBJETIVOS: Identificar y Aplicar principios aditivo y/o multiplicativo
Calcular factorial de un número
Reconocer permutaciones en situaciones problemáticas y encontrar la solución.

Instrucciones: Realice ésta guía de trabajo en su cuaderno
Todos los cálculos deben estar legibles y ordenados.

Conocimiento previo

a. ¿De cuántas maneras se pueden alinear tres libros (física, química y matemáticas) en un estante?

b. En Colombia las placas de los vehículos tienen tres letras y tres números. ¿Cuántos vehículos se pueden identificar, suponiendo que las letras y números se pueden repetir?

El ***objetivo de los problemas de la teoría combinatoria*** *es el recuento y la clasificación de los elementos de un conjunto finito que posea determinadas propiedades, a través de una serie de reglas y procedimientos que se han desarrollado para contar sin tener que listar o enumerar*.

Árboles para contar y listar: Los diagramas de árbol.

Los llamados diagramas de árbol constituyen un instrumento eficiente para listar, contar y analizar los posibles resultados en una sucesión de eventos.

Ejemplo 1. "La Pica"

El menú del restaurante de comidas corrientes "La Pica" ofrece la posibilidad de elegir como plato de entrada sopa o arroz; como plato principal se puede elegir carne, pollo o pescado y de postre pastel o helado.

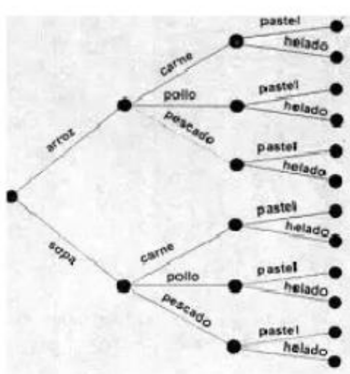

Figura 1

Comida Corriente Posible		Ternas
Arroz, Carne, Pastel	→	(A, C, Pa)
Arroz, Carne, Helado	→	(A, C, H)
Arroz, Pollo, Pastel	→	(A, Po, Pa)
Arroz, Pollo, Helado	→	(A, Po, H)
Arroz, Pescado, Pastel	→	(A, Pe, Pa)
Arroz, Pescado, Helado	→	(A, Pe, H)
Sopa, Carne, Pastel	→	(S, C, Pa)
Sopa, Carne, Helado	→	(S, C, H)
Sopa, Pollo, Pastel	→	(S, Po, Pa)
Sopa, Pollo, Helado	→	(S, Po, H)
Sopa, Pescado, Pastel	→	(S, Pe, Pa)
Sopa, Pescado, Helado	→	(S, Pe, H)

<u>El árbol de la figura 1</u> muestra todas las posibilidades de comidas corrientes que ofrece el restaurante. En este caso, el árbol inicia en un vértice (extrema izquierda). Las trayectorias que inician en él y que terminan en cada uno de los vértices a la derecha se llaman ramas y al recorrer cada una de ellas de izquierda a derecha obtenemos todas las posibles comidas corrientes que ofrece el restaurante. El árbol muestra que hay doce comidas corrientes distintas.

<u>Ejemplo 2. Acomodando libros.</u>

¿De cuántas maneras se pueden alinear tres libros (física, química y matemáticas) en un estante?
El número de maneras como pueden alinearse tres libros, física, química y matemáticas, se establece fácilmente conayuda de un diagrama de árbol.

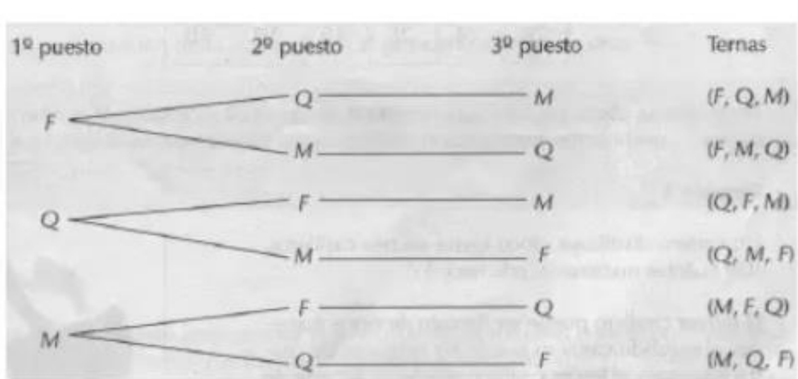

Figura 2

En total se pueden formar seis ternas, la última de ellas, por ejemplo, significa que en el estante los libros quedan alineados como muestra la figura 3.

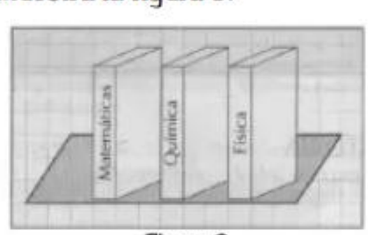

Figura 3

<u>El Principio Fundamental de Conteo</u>

El principio fundamental de conteo, también conocido como *regla del producto* o *principio multiplicativo*, es tan simple que de hecho lo usamos implícitamente en cada uno de los ejemplos que hemos considerado. La regla del producto del uso de árboles para contar posibilidades. Ahora procedemos a enunciar de manera formal el principio fundamental de conteo.

Regla del producto (dos pasos)
Supongamos que un proceso consiste de *dos* pasos. Si hay *m* maneras de hacer el primer paso y *n* maneras de hacer el segundo paso, entonces hay *m x n* maneras de hacer el proceso completo.

Regla del producto (k pasos)
Supongamos que un proceso consiste de *k* pasos. Si hay n_1 maneras de hacer el primer paso, n_2 *maneras* de hacer el segundo paso, ... , y n_k maneras de hacer el último paso, entonces hay n_1 x n_2 x … n_k maneras de hacer el proceso.

Veamos ahora cada uno de los principios a detalle:

Principio de la multiplicación
Si un evento A se puede realizar de «m» formas diferentes y luego se puede realizar otro evento B de «n» formas diferentes, el número total de formas en que pueden ocurrir A y B es igual a m x n. Es decir, ambos eventos se realizan, primero uno y luego el otro. **El «y» indica multiplicación**.

Ejemplo: ¿de cuántas formas se puede vestir una persona que tiene 3 pantalones y 3 camisas?
RESPUESTA: Para vestirse, la persona se pone el pantalón y luego la camisa, es decir tiene 3 x 3 = 9 opciones diferentes de vestirse.

Principio de la adición
Si un evento «A» se puede realizar de «m» maneras diferentes, y otro evento «B» se puede realizar de «n» maneras diferentes, además, si ocurre uno no puede ocurrir el otro, entonces, el evento A o el evento B, se realizarán de m+n formas. Es decir, aquí ocurre A o ocurre B. **El «o» indica suma.**

Ejemplo: ¿de cuántas formas se puede cruzar un río, sabiendo que se dispone de 3 botes y 4 barcos?
RESPUESTA: El río se puede cruzar en bote o en barco, es decir, tiene 3 + 4 = 7 opciones diferentes para cruzar el río. El río se cruza en bote o en barco.

EJERCICIOS:
a) Los números telefónicos en Chile son de 8 dígitos, de los cuales el primero tiene que ser 4 y el segundo no puede ser 0,1 ni 7.¿ Cuántos números telefónicos diferentes se pueden formar?
b) Una sala de lectura tiene 5 puertas: ¿de cuántas maneras puede entrar a la sala un estudiante y salir por una puerta diferente? ¿y si sale por cualquier puerta?
c) ¿Cuántos resultados se pueden obtener si se lanza una moneda tres veces? ¿si se lanza 5 veces?
d) De la ciudad A a la ciudad B, se puede ir mediante dos buses o 3 trenes, de la ciudad B a la ciudad C, se puede ir mediante 2 barcos, 2 trenes o 3 aviones. ¿De cuántas formas se puede ir de la ciudad A a la ciudad C, pasando por B?
e) ¿De cuantas formas se puede cruzar un río una sola vez, si se cuenta con 1 bote y 2 barcos?
f) ¿De cuantas formas se puede vestir una persona que tiene 2 pantalones y 3 camisas?
g) ¿De cuántas formas se puede ordenar una pizza, si hay 2 opciones de masa (tradicional y especial) y 4 sabores (hawaina, carne, vegetariana y americana). Solo se puede pedir la masa y un sabor.

La función factorial: Es una fórmula matemática representada por el signo de exclamación "!". En la fórmula Factorial se deben multiplicar todos los números enteros y positivos que hay entre el número que aparece en la fórmula y el número 1.

Es muy fácil, aquí tienes un ejemplo: `7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5.040`

En esta fórmula el número 7 se llamaría 7 factorial o factorial de 7 y multiplicaremos todos los números que aparecen en la fórmula hasta llegar al 1.

Qué pasa con el 0 factorial, ¿cómo calcularlo? Si volvemos a la definición de función factorial podemos ver que no tiene sentido aplicarla en el caso del "0". No existen números positivos anteriores al 0 por lo que 0 x 0 = 0.

No obstante, se ha acordado que en el caso de 0 factorial el resultado será igual a 1: 0! = 0 x 0 = 1

Actividad 1:
1! =
3! =
10! =
5! =
7! =

Actividad 2.
Simplifica cuando corresponda:

1.- $4! + 3!$

3.- $5!.3! + (2x3)! – 6!$

5.- $\frac{16!}{12!.4!}$

PERMUTACIONES

Definición: Se denomina **permutación**, a cada una de las diferentes ordenaciones que se pueden realizar con todos los elementos de un conjunto.

Permutación Simple o Lineal: Son las permutaciones que pueden hacerse con los elementos de un conjunto, **sin repetirlos**.

$$\boxed{\mathbf{P(n) = n!}}$$

Permutaciones con repetición: El número de permutaciones de **n** elementos, de los cuales, k_1 son iguales, k_2 son iguales,…. Kr son iguales, está dada por

$$\boxed{\mathbf{P_{rep} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots k_r!}}}$$

Permutaciones circulares: El número de maneras diferentes en que se pueden ordenar **n** elementos diferentes a lo largo de una circunferencia está dado por:

$$\boxed{\mathbf{P_{circul} = (n - 1)!}}$$

Ejemplos:

1. ¿De cuántas formas se puede ubicar 5 autos en fila en un estacionamiento?
   RESPUESTA: 5! = 120
2. ¿De cuántas maneras distintas se puede sentar una familia de 7 integrantes alrededor de una mesa circular?
   RESPUESTA: (7- 1)! = 720

EJERCICIOS:

a) Se ordenan en una fila 5 bolas rojas, 2 bolas blancas y 3 bolas azules. Si las bolas de igual color no se distinguen entre sí. ¿De cuántas formas posibles pueden ordenarse?.
b) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?
c) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?
d) Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿Cuántos números de nueve cifras se pueden formar?
e) En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?